Lineare Algebra für Physiker, Serie 14

Abgabe am 31. 1. 2008

1. Es sei V eine unitärer Raum und $T \in \mathrm{L}(V)$, $T^* = T$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind. **2 P**

2. Identifiziert man die quadratischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, indem man die Spalten der Matrix als Vektoren auffasst, so definiert die Determinante (Definition 4.1 und Beispiel 4.1) eine schiefsymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix A dieser Bilinearform bezüglich der Standardbasis $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$.

   (b) Bestimmen Sie die Matrix A' dieser Bilinearform bezüglich der Basis $F = \{(1,1), (-2,1)\}$ und verifizieren Sie die Transformationsformel $A' = S^\top A S$. **4 P**

3. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Für $k \in \{1,2,3\}$ bezeichnet e_k^* das in Beispiel 1 definierte Koordinatenfunktional.
   Bestimmen Sie die Matrix der Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $B(x,y) = 3\mathrm{e}_1^*(x)\mathrm{e}_2^*(y) - 4\mathrm{e}_3^*(x)\mathrm{e}_2^*(y)$ und berechnen Sie $B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$. **3 P**

4. Klassifizieren Sie die folgenden Matrizen als positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ -7 & -9 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 & -12 \\ 5 & 7 & 3 & -7 \\ -1 & 3 & 6 & -5 \\ -12 & -7 & -5 & 34 \end{pmatrix}$$

   6 P

5. (a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Welche Punktmenge im $\mathbb{R}^3$ ist $E = \{x = (x_1, x_2, x_3)^\top \mid \langle x\,,\, Ax\rangle = x^\top A x = 0\}$? **6 P**