

Lineare Algebra für Physiker, Serie 14

Abgabe am 31. 1. 2008

1. Es sei V ein unitärer Raum und $T \in L(V)$, $T^* = T$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind. **2 P**
2. Identifiziert man die quadratischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, indem man die Spalten der Matrix als Vektoren auffasst, so definiert die Determinante (Definition 4.1 und Beispiel 4.1) eine schiefsymmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^2 .
 - (a) Bestimmen Sie die Matrix A dieser Bilinearform bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ des \mathbb{R}^2 .
 - (b) Bestimmen Sie die Matrix A' dieser Bilinearform bezüglich der Basis $F = \{(1, 1), (-2, 1)\}$ und verifizieren Sie die Transformationsformel $A' = S^T A S$. **4 P**
3. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Für $k \in \{1, 2, 3\}$ bezeichnet e_k^* das in Beispiel 1 definierte Koordinatenfunktional. Bestimmen Sie die Matrix der Bilinearform $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $B(x, y) = 3e_1^*(x)e_2^*(y) - 4e_3^*(x)e_2^*(y)$ und berechnen Sie $B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$. **3 P**
4. Klassifizieren Sie die folgenden Matrizen als positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ -7 & -9 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 & -12 \\ 5 & 7 & 3 & -7 \\ -1 & 3 & 6 & -5 \\ -12 & -7 & -5 & 34 \end{pmatrix}$$

6 P

5. (a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Welche Punktmenge im \mathbb{R}^3 ist $E = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \mid \langle x, Ax \rangle = x^T A x = 0\}$? **6 P**