Lineare Algebra für Physiker, Serie 12

Abgabe am 17. 1. 2008

1. Es sei $V = \mathbb{R}^4$ der euklidische Raum mit dem Standardskalarprodukt und der ONB aus Beispiel 5.5, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ mit $b_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $b_2 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$, $b_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, $b_4 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)\}$. Ferner sei $U = \operatorname{lin}\{b_1, b_2\}$ und $v = (a,b,c,d) \in V$.

   (a) Berechnen Sie die Projektion $P_U(v)$ auf U.

   (b) Berechnen Sie die Projektion $P_{U^\perp}(v)$ auf $U^\perp$.

   (c) Berechnen Sie den Abstand des Vektors $w = (2,4,1,3)$ von U.

   (d) Bestimmen Sie die Matrizen $S = M_B(P_U)$ und $T = M_{B_4}(P_U)$ der Projektion bezüglich der Basis B bzw. bzgl. der Standardbasis B_4 des $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie S^*, S^2, T^*, T^2. **4 P**

2. Vier Messpunkte $\{(x_i, y_i) \mid i = 1,2,3,4)\} = \{(0,1),(1,3),(2,4),(3,4)\}$, sollen durch eine Gerade $y = f(x) = ax + b$ angenähert werden, gesucht sind also a und b, und zwar so, dass der Abstand d mit

   $$d^2 = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + (f(x_3) - y_3)^2 + (f(x_4) - y_4)^2$$

   minimal wird (Kleinste-Quadrate-Lösung). Führen Sie dazu die folgenden Schritte aus. Betrachten Sie das inkonsistente lineare Gleichungssystem $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$:

   $$\begin{aligned} 0a + b &= 1 \\ 1a + b &= 3 \\ 2a + b &= 4 \\ 3a + b &= 4. \end{aligned} \quad \text{mit Koeffizientenmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

   den Variablen $(a,b)^\top$ und der rechten Seite $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top = (1,3,4,4)^\top$.

   (a) Zwischen welchen Räumen V und W bildet $T_A\colon V \to W$ ab? Bestimmen Sie das Bild $U = \operatorname{Im} A \subset W$, eine ONB von U.

   (b) Berechnen Sie die Projektion $y' = P_U(y)$ zu $y = (1,3,4,4)^\top \in \mathbb{R}^4$ und den euklidischen Abstand s des Vektors y von U.

   (c) Geben Sie alle Lösungen $(a,b)^\top$ des (konsistenten) linearen Gleichungssystems $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y'$. an.

   (d) Skizzieren Sie die erhaltene Gerade $y = ax + b$ sowie die vier Messpunkte. Berechnen Sie d^2 für die Gerade $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$. **6 P**

3. Es sei V ein endlichdimensionaler Raum mit Skalarprodukt und U ein linearer Teilraum von V. Beweisen Sie mit Hilfe des Projektionssatzes die Identität $(U^\perp)^\perp = U$. **4 P**
   Hinweis. Zeigen Sie die einfache Richtung $U \subset (U^\perp)^\perp$ und benutzen Sie dann Lemma 2.6 (c) und Satz 2.7.

4. Gegeben sei die Abbildung $T \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_2 + 2x_3, x_3)$.
   Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T. **3 P**