Lineare Algebra für Physiker, Serie 11

Abgabe am 10.1.2008

1. Bestimmen Sie jeweils eine Lösung $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ bzw. $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^5$, sodass

   (a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} a & -3 & 2 \\ b & 6 & 3 \\ c & d & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ b & c & -2 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

   orthogonale Matrizen sind. **4 P**

2. Es sei $V = \mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren $c_1 = (1,0,\mathrm{i})$, $c_2 = (2,1,1+\mathrm{i})$ und $c_3 = (0,1,0)$ **in dieser Reihenfolge** an.

   4 P

3. (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie: $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ (komplexe Konjugation).
   (b) Zeigen Sie: $A \in \mathrm{U}(n) \Longrightarrow |\det A| = 1$.
   (c) Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ mit $|\det A| = 1$, die nicht unitär sind? Gibt es Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $|\det A| = 1$, die nicht unitär sind?
   (d) Zeigen Sie, dass die Matrizen

   $$\left\{ \begin{pmatrix} a+b\mathrm{i} & c+d\mathrm{i} \\ -c+d\mathrm{i} & a-b\mathrm{i} \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\}$$

   unitär sind. **8 P**

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr
wünschen Ihnen Florin Belgun und Axel Schüler.