Lineare Algebra für Physiker, Serie 10

Abgabe am 20. 12. 2007

1. Es seien a_i, $i = 1, \dots, 4$ und b reelle Zahlen. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ b & a_2 & b & 0 \\ 0 & b & a_3 & b \\ 0 & 0 & b & a_4 \end{vmatrix}.$$

4 P

2. Zwei Leuchttürme K und L stehen $2\mathrm{km}$ voneinander entfernt direkt an der Küste. Ein erstes Schiff hat von K den Abstand $4\mathrm{km}$ und von L den Abstand $3\mathrm{km}$. Ein zweites Schiff hat von K den Abstand $5\mathrm{km}$ und von L den Abstand $6\mathrm{km}$.

   Berechnen Sie den Abstand der beiden Schiffe auf $10\mathrm{m}$ genau. **4 P**

   Hinweis. Die Erdkrümmung soll vernachlässigt werden. Ein Rechner darf benutzt werden.

3. Durch welche Abbildungen wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert? Für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ setzten wir

   (a) $\langle x, y \rangle = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$.

   (b) $\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 - x_2y_3 - y_2x_3$.

   (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$. **4 P**

4. Für $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ setzen wir $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$. Ist dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert? **4 P**

5. (a) Es sei V ein Raum mit Skalarprodukt und $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie, dass die *Parallelogrammidentität* gilt:

$$\|a - c\|^2 + \|a + c\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|c\|^2) \qquad \forall\, a, c \in V.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit $\|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ ein normierter Raum ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Norm in (b) die Parallelogrammidentität nicht erfüllt.

6 P