Lineare Algebra für Physiker, Serie 1

Abgabe am 18.10.2007

1. Es seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to Y$ gegeben durch $f(x) = x(1-x)$. Geben Sie je ein Beispiel für die Mengen X und Y an, sodass die Abbildung f (a) injektiv und nicht surjektiv, (b) surjektiv und nicht injektiv, (c) bijektiv, (d) weder injektiv noch surjektiv (e) gar nicht wohldefiniert ist. **5 P**

2. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$.
   (a) Bestimmen Sie das Bild $f([\pi/3, 3\pi/2])$ des abgeschlossenen Intervalls $[\pi/3, 3\pi/2] = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi/3 \le x \le 3\pi/2\}$.
   (b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(A)$ für $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-1 - \frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}\right)$. Hierbei sei (c,d) das offene Intervall von c bis d, also $(c,d) = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x < d\}$. **5 P**

3. Es sei $A := (a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ eine 2×3-Matrix. Wir definieren die Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ indem wir für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ setzten

   $$T((x_1, x_2, x_3)) := (y_1, y_2) := \left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{3} a_{2j} x_j \right)$$

   (a) Benutzen Sie die Definition des Summenzeichens und die obige Definition der Matrix A um die Abbildung explizit anzugeben. Wie lassen sich y_1 und y_2 durch x_1, x_2 und x_3 ausdrücken? Bestimmen Sie $T((0,1,-5))$.

   (b) Es sei $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $S((y_1, y_2)) = y_1 - 2y_2$. Berechnen Sie die Komposition $S \circ T$.

   (c) Ist S surjektiv, injektiv bzw. bijektiv? **6 P**

4. Es sei $\{B_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Teilmengen der Menge Y, $B_i \subset Y$, $A \subset X$ und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.
   Zeigen Sie, dass

   $$\text{(a)} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad \text{(b)} \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

   4 P

5. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. **5 P**
   Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

   (a) f ist injektiv.
   (b) $\forall A \subset X\colon f^{-1}(f(A)) = A$.
   (c) $\forall A, B \subset X\colon f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

   Beweisen Sie mindestens drei der Implikationen (a) $\Longrightarrow$ (b), (b) $\Longrightarrow$ (a) , (a) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (a), (b) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (b).