Zusammenfassung der wissenschaftlichen Ergebnisse zur Habilitationsschrift

Äußere Algebren, de-Rham-Kohomologie und Hodge-Zerlegung für Quantengruppen

der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig

eingereicht von
Dr. Axel Schüler

angefertigt an der Universität Leipzig, Institut für Mathematik
im September 2000

---

1. Wird die kommutative Funktionenalgebra zu einer Lie-Gruppe G deformiert, so erhält man die „Funktionenalgebra auf einer Quantengruppe“ [7, 2] — eine von einem oder mehreren Parametern abhängige nichtkommutative Algebra $\mathcal{A}$. Die Gruppenmultiplikation, das Vorhandensein eines Einselements und eines Inversen in G widerspiegeln sich in der Existenz einer Komultiplikation, einer Koeins und eines Antipoden auf $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra ist.

2. In den letzten 15 Jahren gab es eine Reihe von Ansätzen, differentialgeometrische Methoden auf eine nichtkommutative Situation zu übertragen [1, 6]. Für die Differentialgeometrie auf Quantengruppen entwickelte Woronowicz [11] eine reichhaltige Theorie. Sie verallgemeinert die folgenden Annahmen, die für Differentialkalküle auf Lie-Gruppen bekannt sind: Die äußere Ableitung d der Funktionenalgebra $\mathcal{A}$ in den $\mathcal{A}$-Bimodul Γ der 1-Formen erfüllt die Leibniz-Regel $\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}a{\cdot}b + a{\cdot}\mathrm{d}b$ und ist kovariant bezüglich der linken und rechten Gruppenmultiplikation, d. h., die Abbildungen $a\,\mathrm{d}b \mapsto (g \cdot a)\,\mathrm{d}(g \cdot b)$ und $a\,\mathrm{d}b \mapsto (a \cdot g)\,\mathrm{d}(b \cdot g)$ sind wohldefiniert. Dabei bezeichnen $g \cdot a$ und $a \cdot g$ die linke und rechte Wirkung der Gruppe auf $\mathcal{A}$.

3. Im Unterschied zur klassischen Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten gibt es auf Quantengruppen keinen ausgezeichneten Differentialkalkül. Damit stellt sich die Frage der Klassifikation aller kovarianten Differentialkalküle (erster Ordnung) auf $\mathcal{A}$. Mit dem Klassifikationsproblem befassen sich eine Reihe von Arbeiten [8, 4].

4. Erst die gründliche Kenntnis der Differentialkalküle erster und höherer Ordnung ermöglicht Ansätze zur Verallgemeinerung weiterer Begriffe der klassischen Differentialgeometrie. Ein vielversprechender Schritt zur Entwicklung einer Riemannschen Geometrie auf Quantengruppen war die Einführung einer σ-Metrik für höhere Differentialformen in der Arbeit von Heckenberger [3]. Dieser Begriff erwies sich als ausgezeichnete Grundlage zur Entwicklung einer Hodge-Theorie für bikovariante Differentialkalküle [5].

5. In dieser Arbeit gehen wir auf die de-Rham-Kohomologie und den Hodgeschen Zerlegungssatz für die Quantengruppen zu den vier klassischen Serien von Lie-Gruppen ein. Als das entscheidende Mittel wurde der Laplace-Beltrami-Operator $L = -\mathrm{d}\partial + \partial\mathrm{d}$ für Woronowicz' äußere Algebren entwickelt. Dabei ist ∂ ein Kodifferential. Für transzendente Werte von q und reguläre Kalkülparameter z ist L diagonalisierbar. Für die obigen Quantengruppen bestimmen wir die Eigenwerte von L, die neben q und z von zwei integralen dominanten Gewichten abhängen.

6. Wir formulieren das Hauptresultat zur de-Rham-Kohomologie, Theorem 4.17. Es sei q eine transzendente komplexe Zahl, $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra zu einer der Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$, $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ bzw. $\mathrm{Sp}_q(N)$ und Γ ein Standarddifferentialkalkül mit regulärem Parameter z. Dann sind die Einbettungen von $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$, $\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}$ und $\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$ der links-, rechts- bzw. biinvarianten Formenräume in den Raum $\Gamma^{\wedge}$ aller Formen Quasiisomorphismen, das heißt, ihre de-Rham-Kohomologien stimmen überein. Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ mit einem Kalkülparameter z, für den $z^N q^{-2} = \zeta$ gilt, wobei ζ eine primitive m-te Einheitswurzel ist, ergibt sich die de-Rham-Kohomologie von $\Gamma^{\wedge}$ als Tensorprodukt der biinvarianten de-Rham-Kohomologie mit der Polynomalgebra in den Variablen $\mathcal{D}^m$ und $\mathcal{D}^{-m}$. Dabei ist $\mathcal{D}$ die Quantendeterminante. Im Falle $\mathrm{O}_q(N)$ erzeugt die Quantendeterminante ebenfalls zusätzliche Anteile in der de-Rham-Kohomologie.

Wie im klassischen Fall wird die de-Rham-Kohomologie durch harmonische Formen repräsentiert. Jedoch entspricht nur im Fall der A-Serie jeder harmonischen Form auch eine de-Rham-Kohomologieklasse. Im Falle der B-, C- und D-Serien sind biinvariante Formen nicht notwendig geschlossen. Es gilt aber, dass jede biinvariante Form harmonisch ist.

7. Das zweite Hauptresultat dieses Problemkreises ist die Hodge-Zerlegung für die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$, Theorem 4.18. Ist der Kalkülparameter z regulär, so lässt sich jede Form eindeutig zerlegen in die Summe aus einem Rand, einem Korand und einem Kohomologierepräsentanten. Ferner gilt, analog zum klassischen Fall, dass die folgenden drei Formenräume übereinstimmen: die biinvarianten Formen, die harmonischen Formen und die de-Rham-Kohomologie.
Für die orthogonalen und symplektischen Quantengruppen gibt es keine vollständige Hodge-Zerlegung. Nur für die Elemente, die im Bild des Laplace-Beltrami-Operators liegen, gibt es eine eindeutige Zerlegung in Rand und Korand. Die Resultate zur de-Rham-Kohomologie und Hodge-Zerlegung sind in der Arbeit [5] zusammengefasst.

8. Es wird die Größe von Woronowicz' äußerer Algebra für die Standardkalküle auf den Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ bestimmt. Diese Ergebnisse sind in den Theoremen 3.11 und 3.12 zusammengefasst. Es wird gezeigt, dass der Raum der linksinvarianten k-Formen $\binom{N^2}{k}$-dimensional ist. Die Algebra der biinvarianten Formen ist graduiert kommutativ. Ihre Poincaré-Reihe ist $(1+t)(1+t^3)\cdots(1+t^{2N-1})$. Biinvariante Formen sind geschlossen. Diese Resultate sind in der Arbeit [9] erschienen.

9. Es gibt im Wesentlichen drei Möglichkeiten der Konstruktion eines Differentialkalküls höherer Ordnung zu einem bikovarianten Kalkül erster Ordnung — die universelle, die quadratische und Woronowicz' äußere Algebra. Die Größen dieser drei äußeren Algebren zu den bikovarianten Standardkalkülen werden für alle vier Serien miteinander verglichen, siehe Theorem 3.13 für die A-Serie und Theorem 3.14 für die Serien B, C und D. Für die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ mit $N \geq 2$ und q transzendent fallen Woronowicz' und die quadratische äußere Algebra zusammen. Für $N \geq 3$ stimmen sie auch mit der universellen äußeren Algebra überein. Im Falle der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen sowie für die $4D_{\pm}$-Kalküle auf $\mathrm{SL}_q(2)$ ist der universelle Kalkül echt größer. Die Dimension des Raumes der linksinvarianten

2-Formen ist genau um Eins größer als beim quadratischen Kalkül. Diese Resultate sind in [10] erschienen.

Literatur

[1] Connes, A.: *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1995

[2] Drinfeld, V.: Quantum groups, in *Proceedings ICM 1986*, Amer. Math. Soc., 1987

[3] Heckenberger, I.: Hodge and Laplace-Beltrami operators for bicovariant differential calculi on quantum groups, *Compositio Math.* **123** (2000), 329–354, preprint math.QA/9902130

[4] Heckenberger, I. und K. Schmüdgen: Classification of bicovariant differential calculi on the quantum groups $SL_q(n+1)$ and $Sp_q(2n)$, *J. Reine Angew. Math.* **502** (1998), 141–162

[5] Heckenberger, I. und A. Schüler: De Rham cohomology and Hodge decomposition for quantum groups, *erscheint in Proc. London Math. Soc.* (2001), preprint NTZ Universität Leipzig 10/2000, math.QA/0008195

[6] Manin, Y.: *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques (CRM), Montréal, 1988

[7] Reshetikhin, N., L. Takhtadzhyan und L. Faddeev: Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 193–225

[8] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups of type A, B, C and D, *Commun. Math. Phys.* **167** (1995), 635–670

[9] Schüler, A.: Differential Hopf algebras on quantum groups of type A, *J. Algebra* **214** (1999), 479–518, math.QA/9805139

[10] Schüler, A.: Two exterior algebras for orthogonal and symplectic quantum groups, *Compositio Math.* **126** (2001), 57–77, preprint math.QA/9906044

[11] Woronowicz, S. L.: Differential calculus on quantum matrix pseudogroups (quantum groups), *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), 125–170

Heinz Hopf (1894 – 1971)

- 19. 11. 1894 Geburt in Wroclaw
- Studium in Berlin bei E. Schmidt, in Heidelberg und in Göttingen
- Studium von Abbildungen geschlossener Mannigfaltigkeiten, insbesondere von Abbildungen in Sphären. Sei $f\colon S^3 \to S^2$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist für fast alle Punkte von S^2 das Urbild unter f ein eindimensionales Gebilde, das aus einer oder mehreren Kreislinien besteht. Die *Hopf-Invariante* von f ist dann die Verschlingungszahl (in S^3) der Urbilder zweier verschiedener Punkte. So hat etwa die Hopf-Faserung $f\colon S^3 \to S^2$, $f(z_1, z_2) := z_1/z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Hopf-Invariante 1.
- 1925/26 wurde Hopf in Göttingen mit den Ideen von Emmy Noether bekannt. Er war möglicherweise der erste Topologe, der die Bedeutung des Noetherschen Standpunktes zu würdigen wusste, dass die einfachsten Objekte, die homologische Relationen beschreiben, nicht Zahlen sind (Betti-Zahlen, Torsionszahlen), sondern algebraische Konstruktionen, etwa abelsche Gruppen. Diese Wertschätzung kann man als einen Vorboten des funktoriellen Zuganges ansehen, der heutzutage die gesamte algebraische Topologie durchdringt.
- 1925 trifft Heinz Hopf in Göttingen den russischen Mathematiker Paul Alexandroff. Die beiden verbindet eine lebenslange Freundschaft. Sie verfassen in siebenjähriger Arbeit das Buch „Topologie I“, Grundlehren der Math. Wissenschaften Bd. 45, Springer (1935)

- 1931–1965: Professor an der ETH Zürich
- 1935 fand in Zürich unter der Leitung von E. Cartan ein Topologen-Kongress statt. Cartan stellte fest, dass der Kohomologiering der Lie-Gruppen einer der vier klassischen Serien gleich dem Kohomologiering des kartesischen Produkts von ungerade-dimensionalen Sphären ist. Wir können etwa schreiben:

$$U(n) \overset{\mathbb{Q}}{\cong} S^1 \times S^3 \times \cdots \times S^{2n-1}, \qquad SO(2n) \overset{\mathbb{Q}}{\cong} S^3 \times S^7 \times \cdots S^{4n-5} \times S^{2n-1},$$
$$SO(2n+1) \overset{\mathbb{Q}}{\cong} S^3 \times S^7 \times \cdots \times S^{4n-1} \overset{\mathbb{Q}}{\cong} Sp(n).$$

- Der Beweis des obigen Satzes wurde unabhängig voneinander von Pontrjagin und R. Brauer gefunden und später auch von Ehresmann. Cartan stellte fest, dass nur noch die fünf exzeptionellen Lie-Gruppen untersucht werden müssten. Er fügte jedoch hinzu: Selbst wenn man für die Ausnahme-Lie-Gruppen ein ähnliches Resultat erhielte, man wüsste immer noch nicht, *warum* dies so ist.
- Hopf löste 1939 diese Aufgabe vollständig mit seiner Arbeit „Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen“, Ann. of Math. **42** (1941), 22–52. Das Hauptresultat lautet: Besitzt der topologische Raum X eine „Multiplikation“ $\mu\colon X \times X \to X$ derart, dass für einen gewissen Punkt $x_0 \in X$ die Abbildungen

  $$X \to X \times x_0 \to X \times X \xrightarrow{\mu} X,$$

  kurz $x \mapsto x \cdot x_0$, und $x \mapsto x_0 \cdot x$ homotop zur Identität sind, dann ist der Kohomologiering von X isomorph zum Kohomologiering des Produkts von ungerade-dimensionalen Spähren. Ein solcher Raum heißt *Hopfscher Raum* oder kurz H-Raum.

Literatur

Hilton, P. J., Heinz Hopf, *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972), 202–217

Alexandroff, P., I. Einige Erinnerungen an Heinz Hopf, *Jber. Dt. Math.-Verein.* **78** (1976), 113–146

Samelson, H., II. Zum wissenschaftlichen Werk von Heinz Hopf, *Jber. Dt. Math.-Verein.* **78** (1976), 113–146