# Äußere Algebren, de-Rham-Kohomologie und Hodge-Zerlegung für Quantengruppen

**Der Fakultät für Mathematik und Informatik**
**der Universität Leipzig**
**eingereichte**

**Habilitationsschrift**

**zur Erlangung des akademischen Grades**
**doctor rerum naturalium habilitatus**
**(Dr. rer. nat. habil.)**

**vorgelegt von**

**Dr. rer. nat. Axel Schüler**

**geboren am 06. 03. 1965 in Kleinmachnow**

**Die Annahme der Habilitationsschrift haben empfohlen:**

1. **Prof. Dr. Konrad Schmüdgen, Universität Leipzig**
2. **Prof. Dr. Harald Grosse, Universität Wien**
3. **Prof. Dr. Alfons van Daele, Katholieke Universiteit Leuven**

**Beschluss über die Verleihung des akademischen Grades vom 02. 07. 2001**

**Für Silvia**

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Der Übergang von der klassischen Physik zur Quantenmechanik bedeutete mathematisch die Hinwendung zur Analyse nichtkommutativer Strukturen. So sind die Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum und die Theorie der Lie-Gruppen in der Quantenphysik grundlegend. In den 80er Jahren haben sich zwei eng miteinander verbundene Gebiete der Mathematik und der mathematischen Physik herausgebildet. Dies ist zum einen die durch Connes' Pionierarbeiten [20] entstandene *nichtkommutative Differentialgeometrie*. Das zweite große Gebiet ist die *Theorie der Quantengruppen und Quantenräume*, die in den fundamentalen Arbeiten von Drinfeld [28], Jimbo [55], Woronowicz [109], Faddeev [84], Manin [75] und anderen entwickelt wurde. Es wird allgemein erwartet, dass sich aus diesen beiden Gebieten neue Ansätze und Techniken zur Lösung fundamentaler Probleme der Physik ergeben werden, wie z. B. zur Verbindung von Quantenfeldtheorie und Gravitation, zum Verständnis der Raum-Zeit auf kleinen Längenskalen, Ansätze zur Lösung von Vielteilchenproblemen und integrabler Modelle. Sieht man die Geometrisierung der Physik in Connes' Sinne als ein Programm an, so erkennt man, dass von mathematischer Seite noch viel getan werden muss, um die notwendigen Konzepte bereitzustellen.

Die Theorie der Quantengruppen besitzt eine Vielzahl von Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, wie etwa zur niedrigdimensionalen Topologie und Knotentheorie [60,61,104], zu symmetrischen Räumen und speziellen Funktionen [24, 25], zur Darstellungstheorie von Algebren [65, 85], zur Spektral- und Operatorentheorie [58, 88, 112] und natürlich auch zur Theorie der Hopfalgebren selbst [2–4]. Die große Zahl von Monographien zu Quantengruppen [18, 32, 52, 56, 59, 62, 65, 69, 80, 98] spiegelt die mannigfaltigen Verbindungen wider.

Eine Grundidee der nichtkommutativen Geometrie hat ihren Ursprung im Gelfand-Neumark-Theorem, welches besagt, dass die Kategorie der kompakten Hausdorffräume äquivalent ist zur Kategorie der kommutativen $\mathrm{C}^*$-Algebren mit Eins. Diese Äquivalenz wird vermittelt durch den Übergang vom topologischen Raum zur Algebra der stetigen Funktionen auf diesem Raum. Viele differentialgeometrische Begriffe lassen sich auf diesem Wege algebraisch formulieren. So entsprechen etwa Vektorfelder den Derivationen der Algebra, und Zusammenhänge in einem Vektorbündel entsprechen kovarianten Ableitungen im Modul der Schnitte des Bündels. Mitunter gibt es auch mehrere algebraische Formulierungen eines geometrischen Sachverhalts. Die Idee der nichtkommutativen Geometrie kann man also, vereinfacht ausgedrückt, wie folgt beschreiben: Die kommutative Funktionenalgebra wird durch eine geeignete nichtkommutative Algebra ersetzt, die man als Funktionenalgebra über einem „nichtkommutativen Raum“ interpretiert. Nun sind Lie-Gruppen nicht nur topologische Räume und Mannigfaltigkeiten, sie besitzen noch zusätzliche Strukturen wie die Gruppenmultiplikation, das Einselement und das Inverse. Diese Strukturen widerspiegeln sich auf der Algebrenseite durch das Vorhandensein eines Koprodukts, einer Koeins und eines Antipoden. Das duale Objekt zur Gruppe ist eine kommutative Hopfalgebra.

Der Begriff der Quantengruppe ist nicht streng definiert. Es ist vielleicht auch gar nicht sinnvoll, diesen Begriff festzulegen. Vielmehr hat sich in den letzten Jahren herauskristallisiert, dass diese Bezeichnung für drei große Klassen von Hopfalgebren immer wieder verwendet wird. Das sind zum einen die Deformationen der Einhüllenden von halbeinfachen Lie-Algebren, zum anderen die Deformationen der entsprechenden Koordinatenhopfalgebren auf den zugehörigen Lie-Gruppen und schließlich die kompakten Quantengruppen. Die erstgenannte Klasse gehört zu den quasitriangulären Hopfalgebren, die Angehörigen der zweiten Klasse sind koquasitrianguläre Hopfalgebren. Die Theorie der koquasitriangulären Hopfalgebren wurde in den Arbeiten von Doi [27], Larson und Towber [63] sowie Drinfeld [29] entwickelt. Diese Klasse von Hopfalgebren enthält die Grundobjekte, auf die sich die vorliegende Arbeit bezieht, nämlich die Koordinatenhopfalgebren $\mathcal{O}(G_q)$ zu den $q$-deformierten klassischen Lie-Gruppen.

Von Woronowicz wurden die Quantengruppen schon zeitig als potentielle Träger einer nichtkommutativen Geometrie erkannt [110]. Er entwickelte in [111] eine allgemeine Theorie der kovarianten Differentialrechnung auf Hopfalgebren, die wie bei Connes [20] auf den Begriff der Differentialform aufbaut. Woronowicz’ Konzept wurde erstmals von Carow-Watamura et al. [17] und Jurčo [57] auf die vier Serien von $q$-deformierten Funktionenalgebren auf den klassischen Lie-Gruppen angewandt. Diese Methode wurde später verallgemeinert auf beliebige koquasitrianguläre Hopfalgebren [62, Abschnitt 14.5]. Eine alternative Konstruktion für Kalküle auf Quantengruppen findet man in der Arbeit von Brzeziński und Majid [16]. Zugänge zur Konstruktion von nichtkommutativen Differentialkalkülen auf Quantenräumen stammen von Hermisson [49], Podleś [81], Schmüdgen [89], Sudbery [100] und Wess und Zumino [108]. Auf Quantengruppen wird die große Zahl der möglichen Differentialkalküle durch die Kovarianzforderung eingeschränkt; das ist die Verträglichkeit des Differentials mit der Gruppenwirkung. Allerdings reicht diese Forderung nicht aus, einen kanonischen Kalkül auszusondern, wie es in der klassischen Lie-Theorie der Fall ist. Wegen der Bedeutung der nichtkommutativen Differentialrechnung für die Entwicklung physikalischer Anwendungen wäre es dennoch wünschenswert, einen oder einige ausgezeichnete bikovariante Differentialkalküle zu haben. Damit ist die Frage nach einer Klassifikation der bikovarianten Kalküle erster Ordnung nahe liegend. Mit dem Klassifikationsproblem befasst sich eine Reihe von Arbeiten, etwa [6, 44, 70, 87, 90–93].

Allein das Studium und die Klassifikation von Kalkülen erster Ordnung ist jedoch nicht ausreichend für die Entwicklung einer reichhaltigen Geometrie. Erst die fundierte Kenntnis von Kalkülen höherer Ordnung ermöglicht eine Verallgemeinerung der klassischen differentialgeometrischen Begriffe, wie etwa Metrik und Zusammenhang. Eine Motivation für die vorliegende Arbeit war es, gewisse Konstruktionen auszuzeichnen, etwa aufgrund ihrer Nähe zum klassischen Objekt, wegen ihrer reichhaltigen Struktur oder wegen ihrer Einfachheit in der Handhabung.

In dieser Arbeit werden zwei Problemkomplexe bearbeitet. Im ersten werden verschiedene äußere Algebren zu einem vorgegebenen Kalkül erster Ordnung miteinander verglichen und ihre Größen explizit berechnet. Der zweite Problemkomplex beschäftigt sich mit der de-Rham-Kohomologie und dem Hodgeschen Zerlegungssatz für Quantengruppen.
Das bislang fruchtbarste Konzept, zu einem vorgegebenen kovarianten Kalkül erster Ordnung einen Differentialkalkül höherer Ordnung zu konstruieren, ist die von Woronowicz vorgeschlagene Konstruktion einer äußeren Algebra. Nur in diesem Fall ist es möglich, die Größen der linksinvarianten und biinvarianten äußeren Algebren (für die A-Serie) effektiv zu berechnen, den Laplace-Beltrami-Operator sinnvoll zu definieren und, darauf aufbauend, die de-Rham-Kohomologie sowie die Hodge-Zerlegung zu bestimmen. Als wesentlich unhandlicher erwiesen sich die beiden anderen Versionen von äußeren Algebren.
Ein Hauptresultat des ersten Problemkreises ist in den Theoremen 3.11 und 3.12 dargelegt. Es behandelt die Poincaré-Reihen von äußeren Algebren. Es sei $q$ eine transzendente komplexe Zahl. Für Woronowicz' äußere Algebren über den Quantengruppen vom Typ A und deren $N^2$-dimensionale Standardkalküle werden die Dimensionen des Raumes der links- bzw. biinvarianten $k$-Formen berechnet. Wie im klassischen Fall hat der Raum der linksinvarianten $k$-Formen die Dimension $\binom{N^2}{k}$. Die Algebra der biinvarianten Formen wird als Algebra erzeugt von jeweils einer biinvarianten $(2k-1)$-Form, $k=1,\dots,N$. Sie ist graduiert kommutativ. Die höchste Form ist biinvariant, bis auf Skalare eindeutig bestimmt und hat den Grad $N^2$. Biinvariante Formen sind geschlossen.
Die entscheidenden Methoden für die Lösung dieses Problems stammen aus der Theorie der Iwahori-Hecke-Algebren. Ihre Charaktere, Involutionen, Darstellungen der minimalen zentralen Idempotente sowie polynomwertigen Spurfunktionale, in [83] von Ram eingeführt, wurden verwendet. Ferner werden einige neue Sätze der Kodarstellungstheorie von Koordinatenhopfalgebren bereitgestellt.
Neben Woronowicz' äußerer Algebra gibt es zwei weitere Möglichkeiten, eine differentielle Hopfalgebra $\Gamma^\wedge = \Gamma^\otimes/\mathfrak{J}$ so zu konstruieren, dass sie einen gegebenen kovarianten Kalkül $\Gamma$ erster Ordnung als homogene Komponente ersten Grades enthält. Die *universelle* äußere Algebra ist die größtmögliche Differentialalgebra mit der genannten Eigenschaft. Die *quadratische* äußere Algebra ist ein Quotient der universellen äußeren Algebra, und Woronowicz' äußere Algebra ist wiederum ein Quotient der quadratischen äußeren Algebra. Es stellt sich die Frage, in welchem Maße diese drei äußeren Algebren voneinander abweichen. Für die Quantengruppen vom Typ A wird diese Frage in Theorem 3.13 beantwortet: Es sei $q$ eine transzendente komplexe Zahl, $\Gamma$ einer der Standardkalküle und $\theta$ die biinvariante 1-Form. Dann stimmen die quadratische äußere Algebra und Woronowicz' äußere Algebra überein. Für $N \geq 3$ und generische Kalkülparameter $z$ sowie für $N=2$ und $z^2 \neq q^2$, $z$ generisch, stimmen ferner die quadratische und die universelle äußere Algebra überein. Nur im Fall $N=2$ und $z^2=q^2$ ist die Dimension des Raumes der linksinvarianten 2-Formen des universellen Kalküls genau um 1 größer als beim quadratischen Kalkül. Der universelle Kalkül enthält die biinvariante 2-Form $\theta\wedge\theta$ zusätzlich. Faktorisiert man den universellen Kalkül nach dieser 2-Form, so erhält man den quadratischen Kalkül. Die Form $\theta\wedge\theta$ ist in der universellen äußeren Algebra zentral. Der universelle Kalkül ist ein innerer Differentialkalkül, d. h. $\mathrm{d}\rho = \theta\wedge\rho - (-1)^n\rho\wedge\theta$ für eine $n$-Form $\rho$.
Im Theorem 3.14 werden die quadratische und die universelle äußere Algebra zu den Standard-

kalkülen auf den orthogonalen und symplektischen Quantengruppen miteinander verglichen: Es sei $q$ keine Einheitswurzel und $\theta$ die biinvariante 1-Form. Dann ist die quadratische äußere Algebra isomorph zum Quotienten der universellen äußeren Algebra nach dem von $\theta \wedge \theta$ erzeugten Ideal. Die 2-Form $\theta \wedge \theta$ ist in der universellen äußeren Algebra zentral, und der universelle Differentialkalkül ist ein innerer.
Für den Nachweis, dass die universelle äußere Algebra in den betreffenden Fällen echt größer ist als die quadratische äußere Algebra, geben wir eine zusätzliche quadratische Relation im Quanten-Tangentialraum an. Für die umgekehrte Richtung, nämlich den Nachweis, dass das zum universellen Kalkül gehörige Ideal nicht zu klein wird, benutzen wir neue Sätze zu Unter-Hopf-Bimoduln.
Hopf-Bimoduln nehmen in dieser Arbeit eine zentrale Stellung ein, da sie unter verschiedensten Gesichtspunkten immer wieder benötigt werden. Zunächst werden sie zur Konstruktion kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung verwendet. Das Tensorprodukt von Hopf-Bimoduln wird für die Konstruktion äußerer Algebren benutzt. Um Größenvergleiche zwischen ihnen treffen zu können, werden Unter-Hopf-Bimoduln betrachtet. Schließlich benötigt man zur Konstruktion einer $\sigma$-Metrik – der Grundlage für Kodifferential und Laplace-Beltrami-Operator – die Begriffe des linksdualen bzw. rechtsdualen Hopf-Bimoduls. Die Resultate dieses ersten Problemkomplexes sind in den Arbeiten [96, 97] enthalten.

Im zweiten Problemkomplex gehen wir auf die de-Rham-Kohomologie und den Hodgeschen Zerlegungssatz ein. Wir betrachten hier ausschließlich Woronowicz' äußere Algebren. Die Frage nach den de-Rham-Kohomologien wurde bislang nur in wenigen Arbeiten, etwa in [36, 110] und [42, Abschnitt 8], behandelt. Allen betrachteten Fällen liegt die relativ leicht handhabbare Quantengruppe $\mathrm{SL}_q(2)$ zugrunde. Die hier verwendeten Methoden versagen jedoch für die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ bei allgemeinem $N$. Als entscheidendes Mittel, die auftretenden Probleme anzugehen, wurde der Laplace-Beltrami-Operator für Woronowicz' äußere Algebra entwickelt. Die Grundlagen dazu wurden von Heckenberger [41] gelegt. Der Autor hat den Laplace-Beltrami-Operator modifiziert und die Spektralzerlegung des Laplace-Beltrami-Operators für den Fall der Quantengruppe $\mathrm{GL}_q(N)$ bestimmt. Wir skizzieren hier die einzelnen Schritte der Konstruktion des Laplace-Beltrami-Operators. Ausgangspunkt ist ein Paar zueinander dualer Differentialkalküle $\Gamma_+$ und $\Gamma_-$ mit einer $\sigma$-symmetrischen dualen Paarung. Diese wird zu einer dualen Paarung der Tensoralgebren $\Gamma_+^\otimes$ und $\Gamma_-^\otimes$ fortgesetzt. Mit Hilfe des Antisymmetrisators und der Schiebepermutationen, die mit der Zopfung konstruiert wurden, wird auf dem Tensorprodukt $\Gamma_+^\otimes \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_-^\otimes$ eine Kontraktion definiert. Der Antisymmetrisator und die Schiebepermutationen „mischen“ dabei die Tensorkomponenten so, dass sich die Kontraktion faktorisieren lässt zu einer Kontraktion der äußeren Algebren. Das Kodifferential $\partial$ definiert man mittels Kontraktion mit der biinvarianten 1-Form des dualen Kalküls. Der Laplace-Beltrami-Operator schließlich wird definiert als $-\mathrm{d}\,\partial + \partial\,\mathrm{d}$. Die beiden Hauptergebnisse dieses Kapitels sind die Aussagen zur de-Rham-Kohomologie der bikovarianten Differentialkalküle (Theorem 4.18) sowie der Hodgesche Zerlegungssatz für die Kalküle der A-Serie (Theorem 4.19). Das Theorem 4.18 besagt folgendes. Es sei $q$ eine transzendente komplexe Zahl, $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra zu einer der Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$, $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ bzw. $\mathrm{Sp}_q(N)$ und $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ ein Standarddifferentialkalkül mit regulärem Parameter $z$. Dann sind die Einbettun-

gen von $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$, $\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}$ und $\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$ der links-, rechts- bzw. biinvarianten Formenräume in den Raum $\Gamma^{\wedge}$ aller Formen Quasiisomorphismen, das heißt, ihre de-Rham-Kohomologien stimmen überein. Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ mit einem Kalkülparameter $z$, für den $z^N q^{-2} = \zeta$ gilt, wobei $\zeta$ eine primitive $m$-te Einheitswurzel ist, ergibt sich die de-Rham-Kohomologie von $\Gamma^{\wedge}$ als Tensorprodukt der biinvarianten de-Rham-Kohomologie mit der Polynomalgebra in den Variablen $\mathcal{D}^m$ und $\mathcal{D}^{-m}$. Dabei ist $\mathcal{D}$ die Quantendeterminante. Im Falle $\mathrm{O}_q(N)$ erzeugt die Quantendeterminante ebenfalls zusätzliche Anteile in der de-Rham-Kohomologie.
Entscheidend für die Existenz dieser Quasiisomorphismen ist, dass der Laplace-Beltrami-Operator diagonalisierbar ist. Seine Eigenwerte, die vom Deformationsparameter $q$, dem Kalkülparameter $z$ und zwei integralen dominanten Gewichten abhängen, werden explizit bestimmt. Dazu wird die Theorie der Pfadalgebren verwendet, wie sie von Leduc und Ram in [64] entwickelt wurde. Wie im klassischen Fall wird die de-Rham-Kohomologie durch harmonische Formen repräsentiert. Jedoch nur im Fall der A-Serie entspricht jeder harmonischen Form eine de-Rham-Kohomologie. Im Falle der B-, C- und D-Serien sind biinvariante Formen nicht notwendigerweise geschlossen. Jede biinvariante Form ist harmonisch; aber für gewisse Kalkülparameter $z$ gibt es weitere harmonische Formen, die sich aus invarianten Formen und der Quantendeterminante konstruieren lassen.
Das zweite Hauptresultat dieses Problemkreises ist die Hodge-Zerlegung für die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ (Theorem 4.19). Ist der Kalkülparameter $z$ regulär, so lässt sich jede Form eindeutig zerlegen in die Summe aus einem Rand, einem Korand und einem Kohomologierepräsentanten. Ferner gilt, analog zum klassischen Fall, dass die folgenden drei Formenräume übereinstimmen: die biinvarianten Formen, die harmonischen Formen und die de-Rham-Kohomologie.
Der Laplace-Beltrami-Operator sichert die Existenz der Hodge-Zerlegung. Für die Eindeutigkeit wird die Dualität von Differential und Kodifferential sowie die schwache Isomorphie der beiden Kalküle $\Gamma_{+}^{\wedge}$ und $\Gamma_{-}^{\wedge}$ benötigt. Für die orthogonalen und symplektischen Quantengruppen gibt es keine vollständige Hodge-Zerlegung. Nur die Elemente, die im Bild des Laplace-Beltrami-Operators liegen, gestatten eine eindeutige Zerlegung in Rand und Korand. Die Resultate dieses Kapitels sind im gemeinsamen Artikel mit Heckenberger [48] festgehalten.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. Im Kapitel 2 werden knapp die Grundlagen für die folgenden Kapitel bereitgestellt. In der Regel werden keine Beweise geführt, ausgenommen in Abschnitt 2.2, wo neue Sätze zu dualen Hopf-Bimoduln genannt werden. Die Definitionen und einfachsten Eigenschaften der Quantengruppen und Quantenvektorräume, wie sie in [84] eingeführt wurden, werden kurz umrissen. Die Teilabschnitte 2.1.5 bis 2.1.7 sind den koquasitriangulären Bialgebren und Hopfalgebren gewidmet. Im Abschnitt 2.2 wird eine Einführung in die Theorie der Hopf-Bimoduln gegeben. Sie beginnt mit der Beschreibung der Strukturtheorie von Hopf-Bimoduln. Im Anschluss werden Tensorprodukte von Hopf-Bimoduln, die Tensoralgebra und der wichtige Begriff der Zopfung (engl. braiding) definiert. Zum Schluss wird auf duale Hopf-Bimoduln eingegangen. Ein Kriterium für Unter-Hopf-Bimoduln wird gezeigt. Abschnitt 2.3 beginnt mit der allgemeinen Definition eines kovarianten Differentialkalküls erster Ordnung. Die damit verbundenen Begriffe wie Quanten-Tangentialraum, $\omega$-Abbildung und assoziiertes Rechtsideal, werden wiederholt. Die verallgemeinerte Jurčo-Konstruktion von bikovarianten Differentialkalkülen auf koquasitriangulären Hopfalgebren wird erläutert. Schließlich wird diese Konstruktion spezialisiert auf die Koordinatenhopfalgebren der Quantengruppen $G_q$. Die explizite Konstruktion der Standardkalküle auf Quantengruppen wird hier wiederholt.

Kapitel 3 ist den äußeren Algebren und Differentialkalkülen höherer Ordnung gewidmet. Zunächst werden die drei Arten von äußeren Algebren zu einem gegebenen Kalkül erster Ordnung definiert. Im zweiten Abschnitt sind die Hauptresultate dargelegt, welche die Größenvergleiche berühren. Im etwas größeren Abschnitt 3.3 werden wichtige Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hecke-Algebren bereitgestellt, und einige neue Sätze werden ergänzt. Einige Fakten zur Kodarstellungstheorie von Koordinatenhopfalgebren werden gezeigt.

Für die Beweise von Theorem 3.13 und Theorem 3.14 werden einige Eigenschaften von Unter-Hopf-Bimoduln verwendet, die in Abschnitt 3.6.1 bewiesen werden. Die obere Abschätzung der Größe des universellen Kalküls ist recht technisch und wurde daher in den Anhang B verschoben.

Im Kapitel 4 steht der Laplace-Beltrami-Operator im Mittelpunkt. In den ersten beiden Abschnitten werden die Begriffe $\sigma$-Metrik, Kontraktion, Kodifferential und Laplace-Beltrami-Operator eingeführt und erste einfache Eigenschaften abgeleitet. Es wird gezeigt, dass das Differential und das Kodifferential bezüglich der $\sigma$-Metrik zueinander dual sind. Im Abschnitt 4.3 werden zunächst die beiden Hauptresultate Theorem 4.18 und Theorem 4.19 genannt. Im Anschluss daran wird die Spektralzerlegung des Laplace-Beltrami-Operators bestimmt, seine Eigenwerte werden berechnet. Insbesondere werden diejenigen integralen dominanten Gewichte ermittelt, bei denen der Eigenwert Null wird. Der Beweis von Theorem 4.18 wird hier beendet. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Hodgesche Zerlegungssatz bewiesen. Dazu wird der Begriff homomorpher Differentialkalküle eingeführt und gezeigt, dass die Standarddifferentialkalküle $\Gamma_+^\wedge$ und $\Gamma_-^\wedge$ diese Eigenschaft besitzen.

Im Anhang A werden die wichtigsten Formeln zum Rechnen mit $\hat{R}$-Matrizen bereitgestellt. Der graphische Kalkül wird erläutert. Anhang B ist vollständig dem Beweis von Lemma 3.38 gewidmet.

Wir beenden die Einleitung mit dem Auflisten von Konventionen. Als Grundkörper dient der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Alle Vektorräume, Algebren, Bialgebren usw. seien $\mathbb{C}$-Vektorräume, $\mathbb{C}$-Algebren, $\mathbb{C}$-Bialgebren usw. Mit $\mathrm{Hom}(V,W)$ wird der Raum der $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen von $V$ nach $W$ bezeichnet. Ferner sei $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$. Das Tensorprodukt $\otimes$ bedeutet stets $\otimes_{\mathbb{C}}$. Die lineare Hülle einer Menge $\{a_i \,|\, i \in K\}$ sei $\langle a_i \,|\, i \in K\rangle$. Mit $\mathcal{A}$ werden stets Bialgebren bezeichnet. Der Dualraum von $\mathcal{A}$ sei $\mathcal{A}^*$, die duale Hopfalgebra zu einer Hopfalgebra $\mathcal{A}$ sei $\mathcal{A}^\circ$. Falls nicht ausdrücklich etwas anderes festgelegt wird, werden Moduln, Bimoduln und Komoduln stets über dem Ring $\mathcal{A}$ betrachtet. Das Koprodukt, die Koeins und die Antipodenabbildung von $\mathcal{A}$ werden mit $\Delta$, $\varepsilon$ bzw. mit $S$ bezeichnet. Ferner ist $\widetilde{a} := a - \varepsilon(a)1$ und $\widetilde{B} := \{\widetilde{b} \,|\, b \in B\}$ für jede Teilmenge $B \subseteq \mathcal{A}$. Insbesondere ist $\ker \varepsilon = \widetilde{\mathcal{A}}$. Es sei $\boldsymbol{v} = (v^i_j)_{i,j\in K}$ eine (endlichdimensionale) Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$, d. h. $\Delta(v^i_j) = \sum_k v^i_k \otimes v^k_j$ und $\varepsilon(v^i_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol). Dann bezeichnen wir die lineare Hülle der Matrixelemente von $\boldsymbol{v}$ mit $\mathcal{C}(\boldsymbol{v}) = \langle v^i_j \,|\, i,j \in K\rangle$. Mit $\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}$ sei die kontragrediente Kodarstellung zu $\boldsymbol{v}$ bezeichnet, wobei $(v^{\mathrm{c}})^i_j = S(v^j_i)$. Auch für eine Darstellung $\boldsymbol{f}$ von $\mathcal{A}$ sei $\boldsymbol{f}^{\mathrm{c}}$ wie oben definiert. Für den Verflechtungsraum zweier Matrixkodarstellungen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$, auch Morphismen- oder Intertwiningraum genannt, wird das Symbol $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ verwendet. $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$ steht für den Raum $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$. Auch im Falle von Matrixdarstellungen $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ von $\mathcal{A}$ wird diese Bezeichnung $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ für den Morphismenraum benutzt. Die transponierte Abbildung zu einer linearen Abbildung $A$ sei $A^{\mathfrak{t}}$, $\operatorname{tr} A$ sei die Spur von $A$, und $\operatorname{rg} A$ sei der Rang von $A$. Für die Einheitsmatrix wird der Buchstabe $I$ reserviert. Die Einbettung $I^{\otimes k-1} \otimes T \otimes I^{\otimes l}$ einer linearen Abbildung $T \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ in den Raum $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l+1})$ mit $k \geq 1$ und $l \geq 0$ wird mit $T_{k,k+1}$, mitunter auch einfach mit $T_k$, bezeichnet. Ist nichts Gegenteiliges vereinbart, so benutzen wir die Einsteinsche Konvention der Summation über doppelt auftretende Indizes in unterschiedlichen Faktoren eines Terms. Die komplexe Zahl $q$ sei stets von Null verschieden und keine Einheitswurzel. Weitere Eigenschaften, wie etwa die Transzendenz, werden explizit erwähnt. Es werden die $q$-Zahlen $[\![N]\!]_q := (q^N - q^{-N})/(q - q^{-1})$ verwendet. Ferner sei $\hat{q} := q - q^{-1}$. In der gesamten Arbeit kommt die Sweedler-Notation für das Koprodukt $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$sowie für Strukturabbildungen von linken Komoduln $\Delta_{\mathrm{L}}(\rho) = \rho_{(-1)} \otimes \rho_{(0)}$ und rechten Komoduln $\Delta_{\mathrm{R}}(\rho) = \rho_{(0)} \otimes \rho_{(1)}$ zur Anwendung. Ist $\mathcal{B}$ ein $\mathcal{A}$-Bimodul, dann heißt die Abbildung $b \triangleleft a := S(a_{(1)})\, b\, a_{(2)}$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, *rechtsadjungierte Wirkung* von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$. Innerhalb eines Kapitels werden Lemmata, Sätze, Theoreme und Folgerungen in gemeinsamer Zählung fortlaufend nummeriert. Jeweils separat gezählt werden Definitionen, Bemerkungen und Beispiele. Das Ende einer Bemerkung bzw. eines Beweises wird mit dem Symbol □ bzw. ■ angezeigt.

Die Abfassung der Habilitationsschrift wurde erst ermöglicht durch die langjährige Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Diese Förderung begann vor der Promotion mit den DFG-Projekten „Lie-Theorie: Harmonische Analyse“ und „Quantengruppen“ und setzte sich fort mit der Vergabe eines Habilitandenstipendiums und der Aufnahme ins Graduiertenkolleg „Analysis, Geometrie und ihre Verbindung zu den Naturwissenschaften“.
Ich danke meinem Doktorvater Konrad Schmüdgen für die Initiierung der oben genannten DFG-Projekte, für die Anregung zu diesem Thema und seine Unterstützung in vielen Detailfragen. Ein besonderer Dank gilt meinem Kollegen und Freund István Heckenberger. Ohne den Gedankenaustausch mit ihm wäre diese Arbeit in dieser Form nicht entstanden.
Für viele interessante Gespräche und Hinweise danke ich Tony Sudbery, Shahn Majid, Arun Ram, Rainer Matthes und Martin Welk. Für die Unterstützung im Graduiertenkolleg danke ich Hans-Bert Rademacher. Ich danke Martin Läuter für aufmerksames Korrekturlesen.
Meiner Frau und meinem großen Sohn danke ich für ihr Verständnis in der Zeit, in der ich mich rar machte.
Schließlich sei auch allen, die diese Arbeit in dieser oder jener Form gefördert haben und hier nicht genannt werden können, an dieser Stelle herzlich gedankt.

# Kapitel 2

# Grundlagen

## 2.1 Quantengruppen

In diesem Kapitel werden die Definitionen und die wichtigsten Eigenschaften der quantisierten Koordinatenalgebren zu den klassischen einfachen Lie-Gruppen wiederholt. Dabei beziehen wir uns auf die grundlegende Arbeit von Faddeev, Reshetikhin und Takhtadzhyan [84].

### 2.1.1 Die FRT-Bialgebra

Es sei $V = \mathbb{C}^N$, $N \geq 2$ der $N$-dimensionale komplexe Vektorraum und $\{e_i \,|\, i = 1, \ldots, N\}$ seine Standardbasis. Ferner sei $\hat{R} \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ ein Endomorphismus mit der Matrixdarstellung $\hat{R} = (\hat{R}^{ij}_{mn})$, $i, j, m, n = 1, \ldots, N$. Mit $\mathbb{C}\langle u^i_j \rangle$ bezeichnen wir die freie Algebra, die von den $N^2$ Generatoren $u^i_j$, $i, j = 1, \ldots, N$ erzeugt ist. Ferner sei $\mathcal{I}$ das von den $N^4$ Elementen

$$I^{ij}_{mn} := \hat{R}^{ij}_{kl} u^k_m u^l_n - u^i_k u^j_l \hat{R}^{kl}_{mn}, \quad i, j, m, n = 1, \ldots, N$$

erzeugte zweiseitige Ideal von $\mathbb{C}\langle u^i_j \rangle$. Es sei $\mathcal{A}(\hat{R})$ die Faktoralgebra $\mathbb{C}\langle u^i_j \rangle / \mathcal{I}$, d. h. die von den Elementen $u^i_j$, $i, j = 1, \ldots, N$ und den Relationen

$$\hat{R}^{ij}_{kl}\, u^k_m u^l_n = u^i_k u^j_l\, \hat{R}^{kl}_{mn}, \quad i, j, m, n = 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

erzeugte Algebra. Die $N \times N$-Matrix $\boldsymbol{u} = (u^i_j)$ der Generatoren heißt *Fundamentalmatrix* von $\mathcal{A}(\hat{R})$. In Matrixschreibweise kann man die obigen Relationen wie folgt aufschreiben: $\hat{R}\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\hat{R}$. Wir zitieren [84, Theorem 1]:

**Satz 2.1** *Es gibt eine eindeutig bestimmte Bialgebrenstruktur auf der Algebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ mit*

$$\Delta(u^i_j) = \sum_k u^i_k \otimes u^k_j \quad \textit{und} \quad \varepsilon(u^i_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Die Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ heißt *FRT-Bialgebra* zur linearen Transformation $\hat{R}$.

### 2.1.2 Quantenvektorräume

Wie im vorigen Abschnitt sei $\hat{R}$ eine komplexe $N^2 \times N^2$-Matrix; $\mathcal{A}(\hat{R})$ sei die zugehörige FRT-Bialgebra.
Die beiden Grundideen zur Konstruktion der Koordinatenalgebra bzw. der äußeren Algebra über einem Quantenvektorraum $\mathbb{C}_q^N$ sind die Folgenden. Erstens soll eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra konstruiert werden, deren homogene Komponenten dieselben Dimensionen haben wie die entsprechenden nichtdeformierten Objekte (Polynomalgebra in $N$ Variablen bzw. äußere Algebra in $N$ Variablen). Zweitens sollen die Algebren unter den Kowirkungen der entsprechenden Hopfalgebren $\mathcal{O}(G_q)$ kovariant sein.
Es sei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein komplexes Polynom. Die Algebra $\mathcal{X}(f;\hat{R})$ ist definiert als Faktoralgebra der freien Algebra $\mathbb{C}\langle x_1,\ldots,x_N\rangle$ nach den $N^2$ Relationen

$$f(\hat{R})^{kl}_{ij} x_k x_l = 0, \quad i,j = 1,\ldots,N. \tag{2.2}$$

Fasst man $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_N)^{\mathrm{t}}$ als Spaltenvektor auf, dann kann man die obigen Relationen in Matrixschreibweise wie folgt darstellen:

$$f(\hat{R})\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = 0.$$

Wir zitieren das entsprechende Resultat aus [84, Theorem 2] (mit der Vertauschung von linken und rechten Komoduln) bzw. [62, Proposition 4].

**Satz 2.2** *Es sei $\mathcal{A}$ eine Bialgebra, die eine Faktoralgebra der FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ ist. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{X}(f;\hat{R}) \to \mathcal{X}(f;\hat{R}) \otimes \mathcal{A}$ mit*

$$\varphi(x_i) = \sum_k x_k \otimes u^k_i, \quad i = 1,\ldots,N.$$

*Auf diese Weise wird $\mathcal{X}(f;\hat{R})$ eine rechte Komodulalgebra über $\mathcal{A}$.*

### 2.1.3 Die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$

In diesem Abschnitt sei $\hat{R}$ die folgende komplexe Matrix [84, Abschnitt 1.4]

$$\hat{R}^{ij}_{mn} = q^{\delta_{ij}}\delta_{in}\delta_{jm} + (q - q^{-1})\delta_{i<j}\delta_{im}\delta_{jn}, \tag{2.3}$$

wobei $\delta_{i<j} = 1$ ist, wenn $i < j$, und sonst Null. Wir wollen annehmen, dass $q^2 \neq -1$, also $[\![2]\!]_q \neq 0$. Die Matrix $\hat{R}$ ist symmetrisch. Sie erfüllt die Hecke-Bedingung

$$(\hat{R} - qI)(\hat{R} + q^{-1}I) = 0 \tag{2.4}$$

und die Zopfrelation $\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$ in $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$. Sie besitzt die folgende Spektralzerlegung

$$\hat{R} = q\hat{P}^+ - q^{-1}\hat{P}^-,$$

wobei

$$\hat{P}^+ = \frac{1}{[\![2]\!]_q}(\hat{R} + q^{-1}I) \quad \text{und} \quad \hat{P}^- = \frac{1}{[\![2]\!]_q}(-\hat{R} + qI) \tag{2.5}$$

orthogonale Idempotente sind.
Es seien $f(t) = t - q$ und $g(t) = t + q^{-1}$. Dann heißen $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^N) := \mathcal{X}(f; \hat{R})$ und $\Lambda(\mathbb{C}_q^N) := \mathcal{X}(g; \hat{R})$ *Koordinatenalgebra* bzw. *äußere Algebra des Quanten-Vektorraumes* $\mathbb{C}_q^N$. Man beachte, dass $f(\hat{R})$ bzw. $g(\hat{R})$ gerade die Faktoren in (2.4) sind, d. h., sie stellen Vielfache von $\hat{P}^-$ bzw. von $\hat{P}^+$ dar. Die Algebra $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^N)$ hat die Generatoren $x_1, \ldots, x_N$ und die erzeugenden Relationen $x_i x_j = q x_j x_i$ für $i < j$. Die Algebra $\Lambda(\mathbb{C}_q^N)$ ist erzeugt von den $N$ Generatoren $y_1, \ldots, y_N$ und den Relationen $y_i^2 = 0$, $i = 1, \ldots, N$ und $y_i y_j = -q^{-1} y_j y_i$ für alle $i < j$. Wir bezeichnen die homogenen Komponente $n$-ten Grades einer $\mathbb{N}_0$-graduierten Algebra $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}_n$, also $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$. Da $\varphi$ den Raum $\mathcal{X}(f; \hat{R})_n$ invariant lässt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, definiert die Einschränkung $\varphi_n$ von $\varphi$ auf diese homogene Komponente eine Unterkodarstellung. Wie im klassischen Fall ist $\dim \Lambda(\mathbb{C}_q^N)_N = 1$, etwa $\Lambda(\mathbb{C}_q^N)_N = \mathbb{C}v$ mit $v = y_1 \cdots y_N$. Daher existiert ein eindeutig bestimmtes gruppenartiges Element $\mathcal{D} \in \mathcal{A}(\hat{R})$, so dass $\varphi(v) = v \otimes \mathcal{D}$. Dieses Element heißt *Quantendeterminante* von $\mathcal{A}(\hat{R})$. Das Element $\mathcal{D}$ ist zentral und gruppenartig in $\mathcal{A}(\hat{R})$, und ist $q$ keine Einheitswurzel, so wird das Zentrum von $\mathcal{D}$ erzeugt. Eine explizite Beschreibung der Quantendeterminante liefert der $q$-antisymmetrische Tensor $(\varepsilon_{\vec{\imath}})$. Es ist $\varepsilon_{\vec{\imath}} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_N} = (-q)^{\ell(\vec{\imath})}$, falls $\vec{\imath}$ eine Permutation von $\{1, \ldots, N\}$ ist, und $\varepsilon_{\vec{\imath}} = 0$ sonst. Dabei ist $\ell(\vec{\imath})$ die Anzahl der Inversionen der Permutation $\vec{\imath}$. Dann gilt

$$\mathcal{D} = \sum_{\vec{\imath}} \varepsilon_{\vec{\imath}} u_1^{i_1} \cdots u_N^{i_N}. \tag{2.6}$$

Das Element $U := \sum_i q^{-2i} u_i^i$ heißt *Quantenspur* von $\boldsymbol{u}$. Es ist, bis auf Vielfachheit, das einzige $\mathrm{Ad}_\mathrm{R}$-invariante lineare Element von $\mathcal{A}$.

**Definition 2.1** Die *Koordinatenhopfalgebra der Quantengruppe* $\mathrm{GL}_q(N)$ ist die zentrale Erweiterung von $\mathcal{A}(\hat{R})$ mit dem Inversen $\mathcal{D}^{-1}$ der Quantendeterminante $\mathcal{D}$. Genauer, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ ist die Faktoralgebra von $\mathcal{A}(\hat{R})[t]$ der Polynome in $t$ mit Koeffizienten in $\mathcal{A}(\hat{R})$ nach dem vom Element $t\mathcal{D} - 1$ erzeugten Ideal.

Somit ist $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ die von den $N^2 + 1$ Elementen $u_j^i$ und $t$ erzeugte Algebra mit den erzeugenden Relationen (2.1) und

$$\mathcal{D}t = t\mathcal{D} = 1, \quad t u_j^i = u_j^i t, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

In $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ gilt $t = \mathcal{D}^{-1}$.

**Definition 2.2** Die *Koordinatenhopfalgebra der Quantengruppe* $\mathrm{SL}_q(N)$, bezeichnet durch $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$, ist definiert als der Quotient der FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ nach dem vom Element $\mathcal{D} - 1$ erzeugten Ideal $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N)) := \mathcal{A}(\hat{R})/\mathcal{J} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))/\mathcal{J}. \tag{2.7}$$

Um den Antipoden definieren zu können, benötigen wir wie für klassische Matrizen die Minoren. Wir definieren die Kofaktoren $\underline{u}(i,j)$ vermöge

$$\underline{u}(i,j) = (-q)^{i-j} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{N-1}} (-q)^{\ell(\sigma)} u^1_{\sigma(1)} \cdots u^{j-1}_{\sigma(j-1)} u^{j+1}_{\sigma(j+1)} \cdots u^N_{\sigma(N)},$$

wobei $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1), \sigma(j+1), \dots, \sigma(N))$ eine Permutation der Zahlen $(1, \dots, i-1, i+1, \dots, N)$ ist. Wir zitieren [84, Theorem 4]:

**Satz 2.3** *Die Algebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ und $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$ besitzen eine eindeutig bestimmte Hopfalgebrenstruktur, so dass das Koprodukt und die Koeins durch $\Delta(u^i_j) = u^i_k \otimes u^k_j$ bzw. $\varepsilon(u^i_j) = \delta_{ij}$ gegeben sind. Der Antipode $S$ ist für $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ gegeben durch $S(u^i_j) = \mathcal{D}^{-1}\underline{u}(i,j)$ und $S(\mathcal{D}^{-1}) = \mathcal{D}$. In $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$ gilt $S(u^i_j) = \underline{u}(i,j)$. Ferner ist $S^2(u^i_j) = q^{2i-2j}u^i_j$.*

### 2.1.4 Die Quantengruppen $\mathrm{O}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ und $\mathrm{Sp}_q(N)$

Wir tragen hier die Definitionen und einfachsten Eigenschaften der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen zusammen. Es sei $N \geq 3$ eine natürliche Zahl. Wir setzen $i' := N+1-i$ für alle $i = 1, \dots, N$. Ferner sei $n = N/2$, falls $N$ gerade ist und $n = (N-1)/2$, falls $N$ ungerade ist. Zu den Serien $\mathrm{B}_n$ und $\mathrm{D}_n$ gehören die Quantengruppen $\mathrm{O}_q(2n+1)$, $\mathrm{SO}_q(2n+1)$ bzw. $\mathrm{O}_q(2n)$ und $\mathrm{SO}_q(2n)$. Zur Serie $\mathrm{C}_n$ gehört die Quantengruppe $\mathrm{Sp}_q(2n)$. Wir definieren nun die Zahlen $\varrho_i$, $\epsilon$ und $\epsilon_i$, $i = 1, \dots, N$ wie folgt. Es sei $\epsilon = \epsilon_i = 1$ für die Serie $\mathrm{B}_n$ und $\mathrm{D}_n$. Ferner seien $\epsilon_i = 1$ für $i = 1, \dots, n$ und $\epsilon = \epsilon_i = -1$ für $i = n+1, \dots, N$ für die Serie $\mathrm{C}_n$. Wir setzen

$$(\varrho_1, \dots, \varrho_N) = \begin{cases} (n-\frac{1}{2}, n-\frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -n+\frac{1}{2}) & \text{für} \quad \mathrm{B}_n, \\ (n, n-1, \dots, 1, -1, \dots, -n) & \text{für} \quad \mathrm{C}_n, \\ (n-1, n-2, \dots, 0, 0, -1, \dots, -n+1) & \text{für} \quad \mathrm{D}_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Die Werte von $\varrho_i$ sind durch die folgenden beiden Eigenschaften für alle drei Serien bestimmt: es gilt $\varrho_{i'} + \varrho_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, N$ und $\varrho_i = (N+1-\epsilon)/2 - i$ für $i \leq N/2$.
Die Matrix $C = (C^i_j)$, auch *Metrik* genannt, ist dann gegeben durch $C^i_j := \epsilon_i \delta_{ij'} q^{-\varrho_i}$, und es gilt $B := C^{-1} = \epsilon C$. Ferner setzen wir $K^{ij}_{mn} := B^i_j C^m_n$. Die $\hat{R}$-Matrix hat die folgende Gestalt

$$\hat{R}^{ij}_{mn} = q^{\delta_{ij} - \delta_{ij'}} \delta_{in}\delta_{jm} + (q - q^{-1})\delta_{m<j}(\delta_{im}\delta_{jn} - K^{ij}_{mn}). \tag{2.9}$$

Sie ist symmetrisch und erfüllt die folgende kubische Gleichung

$$(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1})(\hat{R} - \mathfrak{r}^{-1}) = 0, \tag{2.10}$$

wobei $\mathfrak{r} := \epsilon q^{N-\epsilon}$. Ferner gilt die Zopfrelation $\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$ in $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$. Wir wollen voraussetzen, dass $(q+q^{-1})(q-\mathfrak{r}^{-1})(q^{-1}+\mathfrak{r}^{-1}) \neq 0$. Insbesondere ist dann $q - q^{-1} \neq 0$. Wir setzen $\mathfrak{s} = 1 + (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^{-1})/(q - q^{-1})$. Dann besitzt $\hat{R}$ die folgende Spektralzerlegung

$$\hat{R} = q\hat{P}^+ - q^{-1}\hat{P}^- + \mathfrak{r}^{-1}\hat{P}^0,$$

wobei

$$\hat{P}^{+} = \frac{1}{[\![2]\!]_q}(\hat{R} + q^{-1}I - \frac{q-q^{-1}}{q\mathfrak{r}-1}K), \quad \hat{P}^{-} = \frac{1}{[\![2]\!]_q}(-\hat{R} + qI - \frac{q-q^{-1}}{q^{-1}\mathfrak{r}+1}K), \quad \hat{P}^{0} = \frac{1}{\mathfrak{s}}K$$

paarweise orthogonale Idempotente sind.
Die Hopfalgebra $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$ war definiert als Quotient der FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ nach der zusätzlichen Relation $\mathcal{D} = 1$. In ähnlicher Weise werden wir die Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$, $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ und $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(N))$ definieren. Es zeigt sich, vgl. [62, Lemma 9.12], dass für alle $i, j = 1, \dots, N$ die Elemente

$$\sum_n B_j^{j'} C_{n'}^{n} u_j^n u_{j'}^{n'} \quad \text{und} \quad \sum_n B_i^{i'} C_{n'}^{n} u_n^i u_{n'}^{i'}$$

übereinstimmen. Wir nennen dieses Element $\mathcal{Q}$. Man zeigt, dass $\mathcal{Q}$ zentral und gruppenartig in $\mathcal{A}(\hat{R})$ ist.

**Definition 2.3** Die *Koordinatenhopfalgebra* $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ ist definiert als der Quotient der FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ nach dem vom Element $\mathcal{Q} - 1$ erzeugten Ideal.

Wir zitieren [84, Theorem 5]:

**Satz 2.4** *Die Algebren* $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ *und* $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$*besitzen eine eindeutig bestimmte Hopfalgebrenstruktur mit dem Koprodukt* $\Delta(u_j^i) = u_k^i \otimes u_j^k$ *und der Koeins* $\varepsilon(u_j^i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$. *Der Antipode* $S$ *ist für beide Algebren gegeben durch* $S(u_j^i) = B_{i'}^{i} u_{i'}^{j'} C_j^{j'} = \epsilon_i \epsilon_j q^{\varrho_j - \varrho_i} u_{i'}^{j'}$. *Es gilt* $S^2(\boldsymbol{u}) = D^{-1}\boldsymbol{u}D$ *mit* $D = B^{\mathrm{t}}C$.

Das Element $U = \sum_{i,j} D_i^j u_j^i$ heißt *Quantenspur* der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{u}$. Es ist, bis auf Vielfachheit, das einzige $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}$-invariante lineare Element von $\mathcal{A}$. In Analogie zur Definition der Koordinatenalgebra und der äußeren Algebra auf dem Quantenvektorraum $\mathbb{C}_q^N$ definiert man auch im Falle der orthogonalen und symplektischen $\hat{R}$-Matrizen die entsprechenden Koordinatenalgebren $\mathcal{O}(\hat{R})$ bzw. äußere Algebren $\Lambda(\hat{R})$. Im Falle der Koordinatenalgebren fordert man die Relationen $\hat{P}^{-}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = 0$ und im symplektischen Fall zusätzlich $\hat{P}^{0}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = 0$. Im Falle der äußeren Algebra sind die definierenden Relationen im orthogonalen Fall $\hat{P}^{+}\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 = 0$ und $\hat{P}^{0}\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 = 0$, während im symplektischen Fall die $\hat{P}^{0}$-Relation entfällt. Es stellt sich wiederum heraus, dass sowohl im orthogonalen wie auch im symplektischen Fall die Menge

$$\{y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_N^{m_N} \mid m_1, \dots, m_N \in \{0,1\}, m_1 + \cdots + m_N = k\}$$

eine lineare Basis der homogenen Komponente $\Lambda(\hat{R})_k$ ist. Insbesondere ist $\dim \Lambda(\hat{R})_N = 1$, und $v := y_1 \cdots y_N$ entspricht genau einem Element $\mathcal{D} \in \mathcal{A}(\hat{R})$ mit $\varphi(v) = v \otimes \mathcal{D}$. Das Element $\mathcal{D}$, die *Quantendeterminante*, ist zentral und gruppenartig in $\mathcal{A}(\hat{R})$. Die Relationen zum quadratischen, zentralen und gruppenartigen Element $\mathcal{Q}$ sind wie folgt, vgl. [39, Abschnitt 5].

$$\mathcal{Q}^N = \mathcal{D}^2 \quad \text{für die B- und D-Serie} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^n = \mathcal{D} \quad \text{für die C-Serie.}$$

Es gilt also $\mathcal{D}^2 = 1$ in $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ und $\mathcal{D} = 1$ in $\mathrm{Sp}_q(N)$. Die Koordinatenhopfalgebra $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(N))$ ist definiert als der Quotient der Koordinatenhopfalgebra $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ nach dem vom Element $\mathcal{D} - 1$ erzeugten Ideal.

### 2.1.5 Koquasitrianguläre Hopfalgebren

Diese große Klasse von Hopfalgebren umfasst die Standard-Deformationen $\mathcal{O}(G_q)$ der Koordinatenhopfalgebren zu den klassischen Lie-Gruppen, wie sie in den obigen Teilabschnitten 2.1.3 und 2.1.4 definiert wurden.

**Definition 2.4** Eine *koquasitrianguläre Bialgebra* ist eine Bialgebra $\mathcal{A}$ zusammen mit einer Bilinearform $\boldsymbol{r}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, so dass die folgenden drei Bedingungen für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$ erfüllt sind:
(i) Die Form $\boldsymbol{r}$ ist bezüglich der Faltung invertierbar, d. h., es gibt eine zweite Bilinearform $\overline{\boldsymbol{r}}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, so dass

$$\boldsymbol{r}(a_{(1)}, b_{(1)})\overline{\boldsymbol{r}}(a_{(2)}, b_{(2)}) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \overline{\boldsymbol{r}}(a_{(1)}, b_{(1)})\boldsymbol{r}(a_{(2)}, b_{(2)}).$$

(ii) Die Multiplikation mit vertauschten Faktoren lässt sich durch $\boldsymbol{r}$ und $\overline{\boldsymbol{r}}$ wie folgt beschreiben:

$$ba = \boldsymbol{r}(a_{(1)}, b_{(1)})\, a_{(2)}b_{(2)}\, \overline{\boldsymbol{r}}(a_{(3)}, b_{(3)}).$$

(iii)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(ab, c) &= \boldsymbol{r}(a, c_{(1)})\boldsymbol{r}(b, c_{(2)}), \\ \boldsymbol{r}(a, bc) &= \boldsymbol{r}(a_{(1)}, c)\boldsymbol{r}(a_{(2)}, b). \end{aligned}$$

Wir nennen $\boldsymbol{r}$ die *universelle* $r$*-Form* von $\mathcal{A}$.

**Bemerkung 2.1** Die Bedingung (ii) beschreibt in gewissem Sinne, wie stark $\mathcal{A}$ von der Kommutativität „abweicht". Sie ist nach Multiplikation von (ii) mit $\boldsymbol{r}(a_{(4)}, b_{(4)})$ äquivalent zu

$$\boldsymbol{r}(a_{(1)}, b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} = \boldsymbol{r}(a_{(2)}, b_{(2)})b_{(1)}a_{(1)}.$$

Die Bedingung (iii) besagt, dass $\boldsymbol{r}$ eine duale Paarung der Bialgebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ (mit vertauschter Multiplikation) definiert. □

**Beispiel 2.1** Jede kommutative Bialgebra ist koquasitriangulär mit der trivialen universellen $r$-Form $\boldsymbol{r}(a, b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$.

Wir zählen nun einige Grundeigenschaften von koquasitriangulären Bialgebren auf. Die Beweise findet man in [62, Teilabschnitt 10.1.1].
Es sei $\mathcal{A}$ eine koquasitrianguläre Bialgebra mit der universellen $r$-Form $\boldsymbol{r}$. Dann gilt für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(a_{(1)}, b_{(1)})\boldsymbol{r}(a_{(2)}, c_{(1)})\boldsymbol{r}(b_{(2)}, c_{(2)}) &= \boldsymbol{r}(b_{(1)}, c_{(1)})\boldsymbol{r}(a_{(1)}, c_{(2)})\boldsymbol{r}(a_{(2)}, b_{(2)}), \qquad (2.11) \\ \boldsymbol{r}(1, a) = \boldsymbol{r}(a, 1) &= \varepsilon(a). \end{aligned}$$

Neben $\boldsymbol{r}$ ist auch $\overline{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{op}}$ eine universelle $r$-Form von $\mathcal{A}$, wobei $\overline{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{op}}(a, b) := \overline{\boldsymbol{r}}(b, a)$.
Eine Hopfalgebra heißt *koquasitriangulär*, falls sie als Bialgebra koquasitriangulär ist. Ist $\mathcal{A}$ eine koquasitrianguläre Hopfalgebra, dann gilt für alle $a, b \in \mathcal{A}$:

$$\boldsymbol{r}(S(a), b) = \overline{\boldsymbol{r}}(a, b), \quad \overline{\boldsymbol{r}}(a, S(b)) = \boldsymbol{r}(a, b), \quad \boldsymbol{r}(S(a), S(b)) = \boldsymbol{r}(a, b).$$

Wir definieren die linearen Funktionale $f$ und $\overline{f}$ auf $\mathcal{A}$ vermöge

$$f(a) = \boldsymbol{r}(a_{(1)}, S(a_{(2)})) \quad \text{und} \quad \overline{f}(a) = \overline{\boldsymbol{r}}(S(a_{(1)}), a_{(2)}), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Dann gilt $f\,\overline{f} = \overline{f}\,f = 1$ in $\mathcal{A}^*$. Der Antipode $S$ von $\mathcal{A}$ ist bijektiv, und es gilt für alle $a \in \mathcal{A}$:

$$S^2(a) = \overline{f}(a_{(1)})\, a_{(2)}\, f(a_{(3)}).$$

Andere Formulierungen der obigen Gleichung sind:

$$f(a_{(1)})S^2(a_{(2)}) = a_{(1)}f(a_{(2)}) \quad \text{und} \quad \overline{f}(a_{(1)})a_{(2)} = S^2(a_{(1)})\overline{f}(a_{(2)}).$$

Setzt man in der ersten Gleichung $a := S(a)$ ein und wendet anschließend $S^{-1}$ an, so hat man

$$f(S(a_{(1)}))a_{(2)} = S^2(a_{(1)})f(S(a_{(2)})).$$

**Bemerkung 2.2** Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, dass für jede Matrixkodarstellung $\boldsymbol{v} = (v^i_j)$ sowohl die Matrix $\big(f(S(v^i_j))\big)$ als auch $\big(\overline{f}(v^i_j)\big)$ zu $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}})$ gehören. □

*Duale Paare von Bialgebren.* Viele wichtige und interessante Sätze über Quantengruppen benötigen für ihren Beweis eine duale Paarung mit einer geeigneten Unteralgebra des Dualraums der zugehörigen Koordinatenhopfalgebra. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass für koquasitrianguläre Bialgebren eine duale Paarung in natürlicher Weise mit Hilfe der universellen $r$-Form gegeben ist.

**Definition 2.5** Ein *duales Paar* von Bialgebren $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}$ ist eine bilineare Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathcal{U} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit

$$\langle \Delta(f), a \otimes b\rangle = \langle f, ab\rangle, \qquad \langle fg, a\rangle = \langle f \otimes g, \Delta(a)\rangle,$$
$$\langle f, 1\rangle = \varepsilon(f), \qquad \langle 1, a\rangle = \varepsilon(a)$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $f, g \in \mathcal{U}$. Die duale Paarung heißt *nicht ausgeartet*, falls aus $\langle f, a\rangle = 0$ für alle $f \in \mathcal{U}$ folgt, dass $a = 0$ und falls aus $\langle f, a\rangle = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$ folgt, dass $f = 0$.

Man zeigt leicht die folgende Tatsache: Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein duales Paar von Hopfalgebren $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}$, dann gilt

$$\langle S(f), a\rangle = \langle f, S(a)\rangle, \quad f \in \mathcal{U},\ a \in \mathcal{A}.$$

### 2.1.6 $\mathcal{A}(\hat{R})$ und $\mathcal{O}(G_q)$ als koquasitrianguläre Bialgebren

Viele koquasitrianguläre Bialgebren und Hopfalgebren werden entsprechend dem folgenden Satz [62, Theorem 10.7] konstruiert.

**Satz 2.5** *Es sei* $\hat{R} = (\hat{R}^{ab}_{rs}) \in \mathbb{C}^{N^2 \times N^2}$, $N \geq 2$ *eine invertierbare Matrix, die die Zopfrelation* $\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$ *auf* $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ *erfüllt. Die FRT-Bialgebra* $\mathcal{A}(\hat{R})$ *ist dann koquasitriangulär. Genauer, es existiert eine eindeutig bestimmte universelle* $r$*-Form* $\boldsymbol{r}$ *auf* $\mathcal{A}(\hat{R})$ *mit*

$$\boldsymbol{r}(u^i_j, u^k_l) = \hat{R}^{ki}_{jl} \quad \textit{und} \quad \overline{\boldsymbol{r}}(u^i_j, u^k_l) = (\hat{R}^{-1})^{ik}_{lj}.$$

Um die Koordinatenhopfalgebren $\mathcal{O}(G_q)$ mit einer koquasitriangulären Struktur zu versehen, benötigen wir einen komplexen Parameter $x \in \mathbb{C}$ zur Normierung der $\hat{R}$-Matrix, vgl. [62, Theorem 10.9].
Im folgenden Satz bezeichne $\hat{R}$, den Serien A, B, C bzw. D entsprechend, eine der Matrizen (2.3) bzw. (2.9).

**Satz 2.6** *Die Koordinatenhopfalgebren* $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$, $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$, $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$, $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ *und* $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(N))$ *sind koquasitrianguläre Hopfalgebren mit einer durch*

$$\boldsymbol{r}_x(u^i_j, u^k_l) = x^{-1}\hat{R}^{ki}_{jl}, \quad i,j,k,l = 1,\dots,N \tag{2.12}$$

*eindeutig bestimmten universellen $r$-Form $\boldsymbol{r}_x$. Dabei ist $x$ im Falle* $\mathrm{GL}_q(N)$ *ein von Null verschiedener Parameter, $x^N = q$ im Falle* $\mathrm{SL}_q(N)$*, $x^2 = 1$ in den Fällen* $\mathrm{O}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(2n)$ *und* $\mathrm{Sp}_q(N)$ *und $x = 1$ im Falle* $\mathrm{SO}_q(2n+1)$.

Für die jeweilige Quantengruppe nennen wir die oben angegebenen Parameter $x$ *zulässig*.

### 2.1.7 Die $\boldsymbol{\ell}$-Funktionale koquasitriangulärer Bialgebren

In diesem Abschnitt definieren wir die $\ell^{\pm}$-Funktionale, die in natürlicher Weise einer koquasitriangulären Bialgebra $\mathcal{A}$ zugeordnet sind. Die von ihnen erzeugte Algebra $\mathcal{U}$ bildet ein duales Paar von Bialgebren mit der Bialgebra $\mathcal{A}$. Sie wird später zur Konstruktion der bikovarianten Differentialkalküle auf den Quantengruppen $G_q$ benötigt.
Es sei $\mathcal{A}$ eine koquasitrianguläre Bialgebra mit universeller $r$-Form $\boldsymbol{r}$. Für $a \in \mathcal{A}$ führen wir die folgenden linearen Funktionale auf $\mathcal{A}$ ein:

$$\ell^+(a) := \boldsymbol{r}(\cdot, a), \quad \ell^-(a) := \overline{\boldsymbol{r}}(a, \cdot), \quad \ell(a)(x) := \boldsymbol{r}(a_{(1)}, x_{(1)})\boldsymbol{r}(x_{(2)}, a_{(2)}),\ x \in \mathcal{A}. \tag{2.13}$$

Ist $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra, so gilt $\ell(a) = S(\ell^-(a_{(1)}))\ell^+(a_{(2)})$. Es sei $\mathcal{U}$ die von den Funktionalen $\ell^{\pm}(a)$, $a \in \mathcal{A}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}'$. Dann gilt [62, Proposition 10.11].

**Satz 2.7** (i) $\mathcal{U}$ *ist eine Unterbialgebra der dualen Bialgebra $\mathcal{A}^\circ$ von $\mathcal{A}$. Die Abbildungen $a \mapsto \ell^{\pm}(a)$ sind Homomorphismen von Bialgebren $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{U}$. Für alle $a, b, x \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\begin{aligned} \ell^{\pm}(ab)(x) &= \ell^{\pm}(b)(x_{(1)})\ell^{\pm}(a)(x_{(2)}), \\ \Delta(\ell^{\pm}(a)) &= \ell^{\pm}(a_{(1)}) \otimes \ell^{\pm}(a_{(2)}). \end{aligned}$$

(ii) *Ist $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra, dann ist $\mathcal{U}$ eine Unter-Hopfalgebra von $\mathcal{A}^\circ$, und es gilt $S(\ell^{\pm}(a)) = \ell^{\pm}(S^{-1}(a))$, $a \in \mathcal{A}$. Ferner gelten für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $g \in \mathcal{A}^\circ$ die folgenden Identitäten:*

$$\begin{aligned} \Delta(\ell(a)) &= \ell(a_{(2)}) \otimes S\big(\ell^-(a_{(1)})\big)\ell^+(a_{(3)}), \\ \ell(a) \triangleleft g &= \ell(a_{(2)})\, g\big(a_{(1)}S(a_{(3)})\big), \\ \ell(a)\ell(b) &= \ell(a_{(1)}b_{(2)})\boldsymbol{r}(b_{(1)}, S(a_{(3)}))\boldsymbol{r}(b_{(3)}, a_{(2)}). \end{aligned}$$

Kommen wir nun zu den $\ell$-Funktionalen zu einer konkreten Matrixkodarstellung $\boldsymbol{v} = (v^i_j)$. Wir definieren

$$\hat{R}^{ni}_{jm} := \boldsymbol{r}(v^i_j, v^n_m) \tag{2.14}$$

und erhalten eine Matrix $\hat{R}$ mit der inversen Matrix $\hat{R}^{-1}$ gegeben durch $(\hat{R}^{-1})^{in}_{mj} = \overline{\boldsymbol{r}}(v^i_j, v^n_m)$. Man erkennt, dass $\hat{R}$ wegen (2.11) die Zopfrelation erfüllt, und es gilt $\hat{R} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})$. Wir definieren nun die Matrizen $\boldsymbol{\ell}^{\pm} = (\ell^{\pm i}{}_j)$ und $\boldsymbol{\ell} = (\ell^i_j)$ von linearen Funktionalen auf $\mathcal{A}$ über

$$\ell^{+i}{}_j = \ell^{+}(v^i_j), \quad \ell^{-i}{}_j = \ell^{-}(v^i_j), \quad \ell^i_j = \ell(v^i_j).$$

Da $\boldsymbol{v}$ eine Kodarstellung von $\mathcal{A}$ ist, ist $\boldsymbol{\ell}^{\pm}$ eine Kodarstellung von $\mathcal{U}$. Ist $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra, so gilt $\ell^i_j = S(\ell^{-i}{}_k)\ell^{+k}{}_j$. Aufgrund der Definition (2.14) von $\hat{R}$ sind die Werte der Funktionale $\boldsymbol{\ell}^{\pm}$ und $\boldsymbol{\ell}$ auf $\boldsymbol{v}$ gegeben durch

$$\ell^{+i}{}_j(v^n_m) = \hat{R}^{in}_{mj},\ \ell^{-i}{}_j(v^n_m) = (\hat{R}^{-1})^{in}_{mj},\ \ell^i_j(v^n_m) = (\hat{R}^2)^{ni}_{mj},\ \ell^{\pm i}{}_j(S(v^n_m)) = (\hat{R}^{\pm})^{ni}_{jm}. \tag{2.15}$$

**Satz 2.8** *Die oben definierten Matrizen $\boldsymbol{\ell}^{\pm}$ und $\boldsymbol{\ell}$ erfüllen mit $\check{R} := P\hat{R}P$ die folgenden Relationen:*

$$\check{R}\boldsymbol{\ell}^+_1\boldsymbol{\ell}^+_2 = \boldsymbol{\ell}^+_1\boldsymbol{\ell}^+_2\check{R}, \quad \check{R}\boldsymbol{\ell}^-_1\boldsymbol{\ell}^-_2 = \boldsymbol{\ell}^-_1\boldsymbol{\ell}^-_2\check{R}, \quad \check{R}\boldsymbol{\ell}^+_1\boldsymbol{\ell}^-_2 = \boldsymbol{\ell}^-_1\boldsymbol{\ell}^+_2\check{R}. \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1\hat{R}\boldsymbol{\ell}_1\hat{R} = \hat{R}\boldsymbol{\ell}_1\hat{R}\boldsymbol{\ell}_1. \tag{2.17}$$

Die Gleichung (2.17) heißt Spiegelungsgleichung (engl. reflexion equation).

## 2.2 Hopf-Bimoduln

Die Strukturtheorien von einseitig und erst recht von zweiseitig kovarianten Bimoduln (Hopf-Bimoduln) über einer Hopfalgebra sind sehr reichhaltig und gestatten eine Vielzahl tiefgreifender Aussagen. Neben der Strukturtheorie von Hopf-Bimoduln beschreiben wir die Konstruktion der Tensoralgebra. Eigenschaften der Zopfung zweier gegebener Hopf-Bimoduln werden genannt. Das Resultat Satz 2.14 zu dualen Hopf-Bimoduln ist unseres Erachtens neu. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet ein Kriterium für Unter-Hopf-Bimoduln.

### 2.2.1 Kovariante Bimoduln

**Definition 2.6** Ein *linkskovarianter Bimodul* über $\mathcal{A}$ ist ein Bimodul $\varGamma$, der mit der Strukturabbildung $\varDelta_{\mathrm{L}} \colon \varGamma \to \mathcal{A} \otimes \varGamma$ ein linker Komodul ist, und der die Gleichung

$$\varDelta_{\mathrm{L}}(a\rho b) = \varDelta(a)\varDelta_{\mathrm{L}}(\rho)\varDelta(b)$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $\rho \in \varGamma$ erfüllt.
Ein *rechtskovarianter Bimodul* über $\mathcal{A}$ ist ein Bimodul, ausgestattet mit einer rechten Kowirkung $\varDelta_{\mathrm{R}} \colon \varGamma \to \varGamma \otimes \mathcal{A}$ derart, dass

$$\varDelta_{\mathrm{R}}(a\rho b) = \varDelta(a)\varDelta_{\mathrm{R}}(\rho)\varDelta(b)$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $\rho \in \varGamma$ gilt.

Die Elemente des Vektorraumes $\Gamma_{\rm L} := \{\omega \mid \Delta_{\rm L}(\omega) = 1 \otimes \omega\}$ bzw. $\Gamma_{\rm R} := \{\omega \mid \Delta_{\rm R}(\omega) = \omega \otimes 1\}$ heißen *links-* bzw. *rechtskovariant*. Das folgende Lemma beschreibt eine wichtige Projektionsabbildung für linkskovariante Bimoduln. Wir zitieren [111, Lemma 2.2]:

**Lemma 2.9** *Es sei $\Gamma$ ein linkskovarianter Bimodul. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Projektion $P_{\rm L}\colon \Gamma \to \Gamma_{\rm L}$ derart, dass*

$$P_{\rm L}(a\rho) = \varepsilon(a)P_{\rm L}(\rho)$$

*für alle $a \in \mathcal{A}$ und $\rho \in \Gamma$ gilt. Die Abbildung $P_{\rm L}$ ist gegeben durch $P_{\rm L}(\rho) = S(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}$. Für $\rho \in \Gamma$ und $a \in \mathcal{A}$ gilt $\rho = \rho_{(-1)}P_{\rm L}(\rho_{(0)})$ und $P_{\rm L}(\rho\, a) = S(a_{(1)})P_{\rm L}(\rho)a_{(2)} = P_{\rm L}(\rho) \triangleleft a$.*

Das folgende Strukturtheorem für kovariante Bimoduln findet man in der Monographie von Sweedler [101, Theorem 4.1.1] in leicht abgewandelter Form.

**Theorem 2.10 (Fundamentalsatz)** *Es sei $\Gamma$ ein linkskovarianter Bimodul. Dann definiert die Abbildung $m\colon \mathcal{A} \otimes \Gamma_{\rm L} \to \Gamma$, $m(a \otimes \rho) = a\rho$ einen Isomorphismus von linkskovarianten Bimoduln. Dabei sind die Strukturabbildungen von $\mathcal{A} \otimes \Gamma_{\rm L}$ wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned} a(b \otimes \rho)c &:= abc_{(1)} \otimes \rho \triangleleft c_{(2)}, \\ \Delta_{\rm L}(b \otimes \rho) &:= b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes \rho \end{aligned}$$

*für $a, b, c \in \mathcal{A}$ und $\rho \in \Gamma_{\rm L}$.*

Insbesondere ist jeder linkskovariante Bimodul $\Gamma$ ein freier $\mathcal{A}$-Bimodul. Jede lineare Basis von $\Gamma_{\rm L}$ ist eine freie $\mathcal{A}$-Linksmodulbasis von $\Gamma$.

**Definition 2.7** Ein *Hopf-Bimodul* über $\mathcal{A}$ (auch bikovarianter Bimodul genannt) ist ein Bimodul $\Gamma$, ausgestattet mit zwei linearen Abbildungen $\Delta_{\rm L}\colon \Gamma \to \mathcal{A} \otimes \Gamma$ und $\Delta_{\rm R}\colon \Gamma \to \Gamma \otimes \mathcal{A}$, so dass $(\Gamma, \Delta_{\rm L}, \Delta_{\rm R})$ ein Bikomodul ist, d. h., linke und rechte Kowirkung sind miteinander vertauschbar, und es gelten $\Delta_{\rm L}(a\omega b) = \Delta(a)\Delta_{\rm L}(\omega)\Delta(b)$ sowie $\Delta_{\rm R}(a\omega b) = \Delta(a)\Delta_{\rm R}(\omega)\Delta(b)$ für alle $a,\ b \in \mathcal{A}$ und $\omega \in \Gamma$.

Die Elemente von $\Gamma_{\rm Inv} = \Gamma_{\rm L} \cap \Gamma_{\rm R}$ heißen *bikovariant*.

**Bemerkung 2.3** (i) Der Begriff des Hopf-Bimoduls wird in der Literatur [1, 62, 101] in verschiedener Weise verwendet. Das hängt im Wesentlichen davon ab, welche der vier Strukturabbildungen (linke und rechte Modul- und Komodulstrukturen) gerade betrachtet werden. Dabei sind stets mindestens eine Modul- und eine Komodulstruktur im Spiel, die im oben angegebenen Sinne miteinander verträglich sein müssen. Bei uns sollen stets alle vier Strukturen präsent und miteinander verträglich sein.
(ii) Ein rechter $\mathcal{A}$-Modul $V$, der auch rechter $\mathcal{A}$-Komodul ist und für den die Bedingung

$$\omega_{(0)} \triangleleft a_{(1)} \otimes \omega_{(1)}a_{(2)} = (\omega \triangleleft a_{(2)})_{(0)} \otimes a_{(1)}(\omega \triangleleft a_{(2)})_{(1)} \tag{2.18}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und $\omega \in V$ erfüllt ist, heißt (rechts-rechts) *Yetter-Drinfeld-Modul*. Diese Struktur wurde erstmals von Yetter [113] untersucht. Hopf-Bimoduln sind als Kategorie mit Tensorprodukt und Zopfung isomorph zu Yetter-Drinfeld-Moduln, siehe [86]. □

Von nun an sei $\Gamma$ einen Hopf-Bimodul. Als Dimension von $\Gamma$ bezeichnen wir die Dimension des Vektorraumes $\Gamma_{\mathrm{L}}$ seiner linksinvarianten Elemente. Die von uns betrachteten Hopf-Bimoduln sind stets als endlichdimensional vorausgesetzt. Wir definieren eine linke und rechte $\mathcal{A}^*$-Wirkung auf $\Gamma$ wie folgt: Für $\rho \in \Gamma$ und $f \in \mathcal{A}^*$ seien

$$f * \rho = \rho_{(0)} f(\rho_{(1)}) \quad \text{und} \quad \rho * f = f(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}.$$

Man nennt sie die *linksreguläre* bzw. *rechtsreguläre* Darstellung von $\mathcal{A}^*$ auf $\Gamma$. Wir kommen nun zum Hauptsatz über Hopf-Bimoduln [101, Theorem 4.1.1] in der Version von Woronowicz [111, Theorem 2.4].

**Theorem 2.11** *Es sei $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul und $\{\omega_i \,|\, i \in K\}$ eine Basis des Vektorraumes $\Gamma_{\mathrm{L}}$. Dann existieren Matrizen $\boldsymbol{v} = (v^i_j)$, $v^i_j \in \mathcal{A}$ und $\boldsymbol{f} = (f^i_j)$, $f^i_j \in \mathcal{A}^\circ$ derart, dass*
(i) *$\boldsymbol{v}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$ ist,*
(ii) *$\boldsymbol{f}$ eine Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ ist,*
(iii) *$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega_j) = \sum_i \omega_i \otimes v^i_j$ und $\omega_i \triangleleft a = \sum_j f^i_j(a)\omega_j$.*
*Ferner gilt die folgende Verträglichkeitsrelation zwischen der Matrixkodarstellung $\boldsymbol{v}$ und der Matrixdarstellung $\boldsymbol{f}$:*

$$\textstyle\sum_r v^r_i(a * f^r_j) = \sum_r (f^i_r * a)v^j_r \tag{2.19}$$

*für alle $a \in \mathcal{A}$ und $i, j \in K$.*
*Ist umgekehrt $\{\omega_i : i \in K\}$ die Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes $\Gamma_0$ und sind $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{f}$ eine Matrixkodarstellung bzw. eine Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ mit* (2.19)*, dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Hopf-Bimodul $\Gamma$, so dass $\Gamma_{\mathrm{L}} = \Gamma_0$ und* (iii) *gelten.*

In dieser Situation benutzen wir die Schreibweise $\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$. Die zweite Gleichung in (iii) ist äquivalent zu

$$\omega_i\, a = \sum_j a_{(1)}\, f^i_j(a_{(2)})\, \omega_j. \tag{2.20}$$

### 2.2.2 Die Zopfung von Hopf-Bimoduln

In diesem Teilabschnitt seien in der obigen Notation $\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ und $\Lambda = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g})$ Hopf-Bimoduln über $\mathcal{A}$. Dann ist das Tensorprodukt $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ ebenfalls ein Hopf-Bimodul mit den folgenden Strukturabbildungen:

$$\begin{aligned} a(\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \beta)b &= (a\alpha) \otimes_{\mathcal{A}} (\beta b), \\ \Delta_{\mathrm{R}}(\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \beta) &= \sum \alpha_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} \beta_{(0)} \otimes \alpha_{(1)}\beta_{(1)}, \\ \Delta_{\mathrm{L}}(\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \beta) &= \sum \alpha_{(-1)}\beta_{(-1)} \otimes \alpha_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} \beta_{(0)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \Gamma$ und $\beta \in \Lambda$. Das $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ entsprechende Paar aus einer Kodarstellung und einer Darstellung lautet $(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}, \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})$. Analog definiert man das Tensorprodukt mehrerer Faktoren: $\Gamma^{\otimes k} := \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ ($k$ Faktoren), falls $k \geq 2$ und $\Gamma^{\otimes} = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma^{\otimes k}$. Dabei sind

$\Gamma^{\otimes 0} = \mathcal{A}$ und $\Gamma^{\otimes 1} = \Gamma$. Definitionsgemäß ist $\Delta_{\mathrm{L}} = \Delta_{\mathrm{R}} = \Delta$ auf $\mathcal{A}$. Dann sind $\Gamma^{\otimes k}$ und $\Gamma^{\otimes}$ Hopf-Bimoduln.
Eine der interessantesten und wichtigsten Eigenschaften von Hopf-Bimoduln ist sicherlich die Existenz einer Zopfung. Sie ist durch zwei Eigenschaften charakterisiert: Für jedes Paar $\Gamma$ und $\Lambda$ von Hopf-Bimoduln ist die Zopfung $\sigma\colon \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ ein Isomorphismus von Hopf-Bimoduln und $\sigma$ erfüllt die Zopfrelation (2.24).

**Definition 2.8** Die lineare Abbildung $\sigma\colon \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$, gegeben durch

$$\sigma(\omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) = \omega_{(-2)}\rho_{(0)}S(\rho_{(1)}) \otimes_{\mathcal{A}} S(\omega_{(-1)})\omega_{(0)}\rho_{(2)}, \tag{2.22}$$

heißt *Zopfung* der Hopf-Bimoduln $\Gamma$ und $\Lambda$.

Wir geben zwei andere Gleichungen für $\sigma$ an, die später oft benutzt werden. Es gilt für $\omega \in \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\rho \in \Lambda_{\mathrm{L}}$:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) &= \rho_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} \omega \triangleleft \rho_{(1)}, \\ \sigma^{-1}(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \omega) &= \omega \triangleleft S^{-1}(\rho_{(1)}) \otimes_{\mathcal{A}} \rho_{(0)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Wir zitieren die Haupteigenschaft der Zopfung [62, Proposition 13.5]:

**Satz 2.12** *Die durch* (2.22) *gegebene Abbildung $\sigma$ ist ein Isomorphismus von Hopf-Bimoduln. Es ist die einzige lineare Abbildung $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \to \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ mit der Eigenschaft*

$$\sigma(a\omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) = a\rho \otimes_{\mathcal{A}} \omega \quad \textit{für } \omega \in \Gamma_{\mathrm{L}},\ \rho \in \Lambda_{\mathrm{R}}.$$

*Die Abbildung $\sigma$ erfüllt die Zopfrelation auf dem dreifachen Tensorprodukt*

$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma). \tag{2.24}$$

Wir benötigen auch die Koordinatenschreibweise für die Zopfung. Sind $\{\omega_i\}$ und $\{\rho_j\}$ lineare Basen der Vektorräume $\Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\Lambda_{\mathrm{L}}$, dann ist $\{\omega_i \otimes_{\mathcal{A}} \rho_j\}$ eine freie Basis des Linksmoduls $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$. Dann folgt aus Theorem 2.11 und der Definition von $\sigma$, dass es komplexe Zahlen $\sigma_{ij}^{nk}$ gibt mit

$$\sigma(\omega_i \otimes_{\mathcal{A}} \rho_j) = \sigma_{ij}^{nk} \rho_n \otimes_{\mathcal{A}} \omega_k, \quad \text{wobei} \quad \sigma_{ij}^{nk} = f_k^i(w_j^n). \tag{2.25}$$

### 2.2.3 Dualität von Hopf-Bimoduln

In diesem Teilabschnitt habe die Hopfalgebra $\mathcal{A}$ stets einen invertierbaren Antipoden. Die Begriffe linksdualer und rechtsdualer Hopf-Bimodul werden eingeführt. Dabei orientieren wir uns an der Arbeit [8, Abschnitt II. 4]. Allerdings ist dort nur der linksduale Hopf-Bimodul definiert. Das Hauptergebnis dieses Abschnitts, Satz 2.13, ist neu. Es besagt, dass der linksduale und der rechtsduale Hopf-Bimodul zueinander isomorph sind. Eine lineare Abbildung $f\colon \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \to \mathcal{A}$ heißt nicht ausgeartet (oder regulär), falls es für alle $\omega \in \Gamma$, $\omega \neq 0$ ein $\rho \in \Lambda$ gibt mit $f(\omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) \neq 0$ und umgekehrt für alle $\rho \in \Lambda$, $\rho \neq 0$ ein $\omega \in \Gamma$ existiert, so dass $f(\omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) \neq 0$.

**Definition 2.9** Es sei $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul. Dann heißt ein Hopf-Bimodul ${}^\vee\Gamma$ *linksdualer Hopf-Bimodul* zu $\Gamma$, falls es einen Homomorphismus $g_{\mathrm{L}}\colon {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \to \mathcal{A}$ von Hopf-Bimoduln derart gibt, dass die Abbildung $g_{\mathrm{L}}$ nicht ausgeartet ist. Ensprechend heißt ein Hopf-Bimodul $\Gamma^\vee$ *rechtsdualer Hopf-Bimodul* zu $\Gamma$, falls es einen nicht ausgearteten Homomorphismus $g_{\mathrm{R}}\colon \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma^\vee \to \mathcal{A}$ von Hopf-Bimoduln gibt.

**Bemerkung 2.4** Da die Abbildungen $g_{\mathrm{L}}$ und $g_{\mathrm{R}}$ Homomorphismen von Bikomoduln sind, sind sie kovariant, d. h., es gilt $(\mathrm{id}\otimes g_{\mathrm{L}})\Delta_{\mathrm{L}} = \Delta g_{\mathrm{L}} = (g_{\mathrm{L}}\otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}$ und $(\mathrm{id}\otimes g_{\mathrm{R}})\Delta_{\mathrm{L}} = \Delta g_{\mathrm{R}} = (g_{\mathrm{R}}\otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}$ auf ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ bzw. auf $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma^\vee$. □

Es sei $\boldsymbol{v}$ eine Matrixkodarstellung. Mit ${}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{v}$ sei die Kodarstellung mit den Matrixelementen $({}^{\mathsf{c}}v)^i_j = S^{-1}(v^j_i)$ bezeichnet. Analog sei für eine Darstellung $\boldsymbol{f}$ das Symbol ${}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{f}$ definiert.

**Satz 2.13** *Es sei $\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ ein Hopf-Bimodul.*
(i) *Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten linksdualen Hopf-Bimodul ${}^\vee\Gamma$ und einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten rechtsdualen Hopf-Bimodul $\Gamma^\vee$.*
(ii) *Die dualen Bimoduln haben die Gestalt ${}^\vee\Gamma = (\boldsymbol{v}^{\mathsf{c}}, {}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{f})$ bzw. $\Gamma^\vee = ({}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}^{\mathsf{c}})$.*
(iii) *Die Paarungen $g_{\mathrm{L}}$ und $g_{\mathrm{R}}$ sind mit der Zopfung im folgenden Sinne verträglich: Es sei $\Lambda$ ein weiterer Hopf-Bimodul. Dann gilt $(g_{\mathrm{L}})_{23}\sigma_{12}\sigma_{23} = (g_{\mathrm{L}})_{12}$ im Raum ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ und $(g_{\mathrm{L}})_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = (g_{\mathrm{L}})_{23}$ in $\Lambda \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$. Für den rechtsdualen Hopf-Bimodul gelten entsprechend $(g_{\mathrm{R}})_{23}\sigma_{12}\sigma_{23} = (g_{\mathrm{R}})_{12}$ in $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ und $(g_{\mathrm{R}})_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = (g_{\mathrm{R}})_{23}$ in $\Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma^\vee$.*

**Bemerkung 2.5** Für den linksdualen Hopf-Bimodul entspricht (iii) der Kommutativität der folgenden beiden Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
{}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \arrow[rr, "\sigma_{12}\sigma_{23}"] \arrow[dr, "g_{\mathrm{L}}\otimes \mathrm{id}"'] & & \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes g_{\mathrm{L}}"] \\
& \Lambda &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \arrow[rr, "\sigma_{23}\sigma_{12}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes g_{\mathrm{L}}"'] & & {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \arrow[dl, "g_{\mathrm{L}}\otimes \mathrm{id}"] \\
& \Lambda &
\end{tikzcd}
$$

□

*Beweis.* (i) und (ii). Wir zeigen die Behauptungen nur für den linksdualen Hopf-Bimodul. Die Beweise für den rechtsdualen Hopf-Bimodul verlaufen analog. Zur Eindeutigkeit: Es sei ${}^\vee\Gamma$ ein linksdualer Hopf-Bimodul zu $\Gamma$. Wir zeigen, dass $\varepsilon g_{\mathrm{L}} 1 = g_{\mathrm{L}} P_{\mathrm{L}}$ in ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ gilt. Insbesondere liefert $g_{\mathrm{L}}$ auf linksinvarianten Formen stets ein Vielfaches von 1. Da $g_{\mathrm{L}}$ eine Linksmodul- und Linkskomodulabbildung ist, erhält man wegen Lemma 2.9 für $t \in {}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{L}}(P_{\mathrm{L}}(t)) &= g_{\mathrm{L}}(S(t_{(-1)})t_{(0)}) = S(t_{(-1)})g_{\mathrm{L}}(t_{(0)}) \\
&= \mathrm{m}(S\otimes \mathrm{id})\big(t_{(-1)}\otimes g_{\mathrm{L}}(t_{(0)})\big) = \mathrm{m}(S\otimes \mathrm{id})\Delta(g_{\mathrm{L}}(t)) \\
&= \varepsilon(g_{\mathrm{L}}(t))1.
\end{aligned}
$$

Da $g_{\mathrm{L}}$ sowohl Links- als auch Rechtsmodulabbildung ist, und da ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ ein freier Links- bzw. Rechtsmodul ist, folgt aus der Regularität von $g_{\mathrm{L}}$ auf ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ die Regularität der Verknüpfung $P_{\mathrm{L}}\circ g_{\mathrm{L}}\colon {}^\vee\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}} \to \mathbb{C}$. Somit sind ${}^\vee\Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\Gamma_{\mathrm{L}}$ zueinander duale Vektorräume.

Es seien $\{\omega_i\}$ und $\{\theta_i\}$ zueinander duale Basen von $\Gamma_{\mathrm{L}}$ bzw. ${}^\vee\Gamma_{\mathrm{L}}$. Ferner sei ${}^\vee\Gamma = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g})$ mit einer Matrixkodarstellung $\boldsymbol{w}$ und einer Matrixdarstellung $\boldsymbol{g}$. Wegen der Rechtskovarianz von $g_{\mathrm{L}}$ gilt dann für alle $i,\ j$:

$$\begin{aligned}\delta_{ij}1 &= g_{\mathrm{L}}(\theta_i \otimes_{\mathcal{A}} \omega_j) = (\varepsilon \circ g_{\mathrm{L}} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(\theta_i \otimes \omega_j)\\ &= \varepsilon \circ g_{\mathrm{L}}(\theta_n \otimes_{\mathcal{A}} \omega_k) \otimes w_i^n v_j^k = w_i^k v_j^k.\end{aligned}$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $S(v_n^j)$ von rechts und summiert über $j$, so ergibt sich die Behauptung $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}$.
Da $g_{\mathrm{L}}$ eine rechte Modulabbildung ist, ergibt sich für alle $a \in \mathcal{A}$ und $i,\ j$:

$$\begin{aligned}a\delta_{ij} &= g_{\mathrm{L}}(\theta_i \otimes_{\mathcal{A}} \omega_j\, a) = g_{\mathrm{L}}(\theta_i\, f_k^j * a \otimes_{\mathcal{A}} \omega_k)\\ &= (g_m^i f_k^j) * a g_{\mathrm{L}}(\theta_m \otimes_{\mathcal{A}} \omega_k) = (g_k^i f_k^j) * a.\end{aligned}$$

Wendet man auf diese Gleichung $\varepsilon$ an, so hat man in $\mathcal{A}^\circ$ die Gleichung $\delta_{ij}1 = g_k^i f_k^j$. Multipliziert man dies von rechts mit $S^{-1}(f_j^n)$ und summiert über $j$, so ergibt sich die zweite Behauptung $\boldsymbol{g} = {}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{f}$. Mithin ist die Eindeutigkeit des linksdualen Hopf-Bimoduls gezeigt. Man überzeugt sich leicht davon, dass das so erhaltene Paar $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{g})$ tatsächlich die Verträglichkeitsbedingung (2.19) erfüllt, so dass damit auch die Existenz von ${}^\vee\Gamma$ nachgewiesen ist.
(iii) Wir zeigen nur die Relation zwischen der Paarung $g_{\mathrm{L}}$ und der Zopfung. Die zweite Gleichung zeigt man völlig analog. Da $g_{\mathrm{L}}$ und $\sigma$ Linksmodulabbildungen sind und ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ ein freier Linksmodul ist, genügt es, die Behauptung für eine Basis von $({}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda)_{\mathrm{L}}$ zu zeigen. Sei dazu $\theta \otimes_{\mathcal{A}} \omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho \in {}^\vee\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Lambda_{\mathrm{L}}$. Dann gilt wegen (2.23)

$$\begin{aligned}(g_{\mathrm{L}})_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\theta \otimes_{\mathcal{A}} \omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho) &= (g_{\mathrm{L}})_{23}\sigma_{12}(\theta \otimes \rho_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} \omega \triangleleft \rho_{(1)})\\ &= (g_{\mathrm{L}})_{23}(\rho_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} \theta \triangleleft \rho_{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \omega \triangleleft \rho_{(2)})\\ &= \rho_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} g_{\mathrm{L}}(S(\rho_{(1)})\theta\rho_{(2)} \otimes_{\mathcal{A}} S(\rho_{(3)})\omega\rho_{(4)})\\ &= \rho_{(0)}\varepsilon(\rho_{(1)}) \otimes_{\mathcal{A}} g_{\mathrm{L}}(\theta \otimes_{\mathcal{A}} \omega) = (g_{\mathrm{L}})_{12}(\theta \otimes_{\mathcal{A}} \omega \otimes_{\mathcal{A}} \rho).\end{aligned}$$

In der vorletzten und letzten Gleichung benutzten wir jeweils, dass $g_{\mathrm{L}}(\theta \otimes_{\mathcal{A}} \omega)$ ein Skalar ist.

■

Wir formulieren nun das Hauptresultat dieses Teilabschnitts.

**Satz 2.14** *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra mit invertierbarem Antipoden und $\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ ein Hopf-Bimodul mit der Basis $\{\omega_i\}$ von $\Gamma_{\mathrm{L}}$. Ferner seien $\{\theta_i\}$ und $\{\eta_i\}$ die linkskovarianten Dualbasen zu $\{\omega_i\}$ vom linksdualen bzw. rechtsdualen Hopf-Bimodul ${}^\vee\Gamma$ bzw. $\Gamma^\vee$, d. h. $g_{\mathrm{L}}(\theta_i, \omega_j) = \delta_{ij}$ und $g_{\mathrm{R}}(\omega_j, \eta_k) = \delta_{jk}$.*
*Dann ist die lineare Abbildung $T\colon {}^\vee\Gamma \to \Gamma^\vee$, gegeben durch*

$$T(a\,\theta_i) = a\,S^2(\eta_i) = a\,S(v_j^i)\eta_k\, v_k^j,$$

*ein Isomorphismus von Hopf-Bimoduln. Dabei bezeichnet $S$ den Antipoden der $\mathbb{N}_0$-graduierten Super-Hopfalgebra $(\Gamma^\vee)^\otimes$. Die dualen Paarungen $g_{\mathrm{L}}$ und $g_{\mathrm{R}}$ sind im folgenden Sinne $\sigma$-symmetrisch*

$$g_{\mathrm{R}}(\mathrm{id} \otimes T) = g_{\mathrm{L}}\sigma \qquad \text{in} \quad \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma.$$

*Beweis.* (a) Wir zeigen zunächst, dass $T$ eine rechte Komodulabbildung ist, d. h. $\Delta_{\mathrm{R}}(T(\theta_i)) = T(\theta_j) \otimes (\boldsymbol{v}^{\mathsf{c}})^j_i$. Da das Koprodukt in $\Gamma^\vee$ durch

$$\Delta(\eta_i) = \Delta_{\mathrm{L}}(\eta_i) + \Delta_{\mathrm{R}}(\eta_i) = 1 \otimes \eta_i + \eta_j \otimes S^{-1}(v^i_j)$$

gegeben ist (vergleiche mit untenstehendem Satz 3.1 oder [62, Proposition 13.7]) und $\varepsilon(\eta_i) = 0$ gilt, erhält man $S(\eta_i) = -\eta_j v^i_j$. Folglich ergibt sich zusammen mit (3.1) (siehe unten) und Satz 2.13 (ii)

$$T(\theta_i) = S^2(\eta_i) = -S(v^i_j)\, S(\eta_j) = S(v^i_j)\, \eta_k\, v^j_k = \eta_k \triangleleft v^i_k. \tag{2.26}$$

Demnach ist $\Delta_{\mathrm{R}}\, T(\theta_i) = S(v^x_j)\, \eta_z\, v^j_y \otimes S(v^i_x)\, S^{-1}(v^k_z)\, v^y_k = T(\theta_x) \otimes S(v^i_x)$, und (a) ist gezeigt.
(b) Wir zeigen, dass $T$ eine rechte Modulabbildung ist und fixieren dazu $b \in \mathcal{A}$. Da $S^2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ surjektiv ist, gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit $S^2(a) = b$. Da $S^2$ ferner Algebrenendomorphismus von $(\Gamma^\vee)^\otimes$ ist, erhält man mit (2.20) und ${}^\vee\Gamma = (\boldsymbol{v}^{\mathsf{c}}, {}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{f})$:

$$\begin{aligned}
T(\theta_i)\, b = T(\theta_i)\, S^2(a) = S^2(\eta_i\, a) \quad &= S^2\big((S(f^j_i) * a)\, \eta_j\big)\\
= S^2\big(a_{(1)} S(f^j_i)(a_{(2)})\big) T(\theta_j) &= (S^2 a)_{(1)} S^{-1}(f^j_i)\big((S^2 a)_{(2)}\big) T(\theta_j)\\
= (S^{-1}(f^j_i) * S^2(a)) T(\theta_j) \quad &= T\big((S^{-1}(f^j_i) * S^2(a))\, \theta_j\big)\\
= T(\theta_i\, S^2(a)) \quad &= T(\theta_i\, b).
\end{aligned}$$

Folglich ist $T$ eine rechte Modulabbildung.
(c) Wegen (2.26) ist $T(\theta_i)$ eine linkskovariante 1-Form. Somit ist $T$ schließlich eine linke Komodulabbildung. Damit ist gezeigt, dass $T$ ein Isomorphismus von Hopf-Bimoduln ist. Insbesondere gilt für die Matrix $\overline{T} := (T^l_i)$ mit $T(\theta_i) = T^l_i \eta_l$, dass $\overline{T} \in \operatorname{Mor}(\boldsymbol{v}^{\mathsf{c}}, {}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{v})$ und $\overline{T}^{\mathsf{t}} \in \operatorname{Mor}(\boldsymbol{f}^{\mathsf{c}}, {}^{\mathsf{c}}\boldsymbol{f})$.
(d) Wir zeigen die Symmetrieaussage. Da $\boldsymbol{f}^{\mathsf{c}}$ die rechte Wirkung auf der linearen Hülle der $\eta_i$ ist, erhalten wir aus (2.26), dass $T(\theta_i) = S(f^l_k)(v^i_k)\eta_l$, d. h. $T^l_i = S(f^l_k)(v^i_k)$. Da $\sigma$, $g_{\mathrm{L}}$, $g_{\mathrm{R}}$ und $T$ sämtlich Bimodulabbildungen sind, genügt es, die Behauptung für $\omega_i \in \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\theta_j \in {}^\vee\Gamma_{\mathrm{L}}$ zu beweisen. Nach (2.23) ist

$$\begin{aligned}
g_{\mathrm{L}}\sigma(\omega_i \otimes_{\mathcal{A}} \theta_j) = g_{\mathrm{L}}(\theta_k \otimes_{\mathcal{A}} (\omega_i \triangleleft S(v^j_k))) &= g_{\mathrm{L}}(\theta_k \otimes_{\mathcal{A}} f^i_n(S(v^j_k))\, \omega_n)\\
= f^i_n(S(v^j_n)) = T^i_j &= g_{\mathrm{R}}(\omega_i \otimes_{\mathcal{A}} T(\theta_j)),
\end{aligned}$$

was den Beweis vollendet. ∎

**Bemerkung 2.6** (i) Leider ist die zweite (erwünschte) $\sigma$-Symmetrie in $\Gamma^\vee \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$, nämlich $g_{\mathrm{L}}\,(T^{-1} \otimes \mathrm{id}) = g_{\mathrm{R}}\,\sigma$, i. a. nicht erfüllt.
(ii) Es ist nicht schwer zu sehen, dass die unten in Abschnitt 2.3.3 definierten Hopf-Bimoduln ${}^\vee\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$ kanonisch isomorph sind. □

Ein linearer Teilraum $\Lambda \subseteq \Gamma$ heißt *Unter-Hopf-Bimodul* von $\Gamma$, falls $\Lambda$ selbst ein Hopf-Bimodul ist. Später wird das folgende Kriterium für Unter-Hopf-Bimodul benötigt.

**Lemma 2.15** *Es sei $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul und $\Lambda \subseteq \Gamma$ ein linker Untermodul und linker Unterkomodul von $\Gamma$. Genau dann ist $\Lambda$ ein Unter-Hopf-Bimodul von $\Gamma$, wenn $\Lambda_{\mathrm{L}}$ bezüglich der rechtsadjungierten Wirkung und der rechten Kowirkung abgeschlossen ist, d. h. $\Lambda_{\mathrm{L}} \triangleleft \mathcal{A} \subseteq \Lambda_{\mathrm{L}}$ und $\Delta_{\mathrm{R}}(\Lambda_{\mathrm{L}}) \subseteq \Lambda_{\mathrm{L}} \otimes \mathcal{A}$.*

*Beweis*. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus dem Hauptsatz über Hopf-Bimoduln, Satz 2.11. Wir zeigen die Hinlänglichkeit. Sämtliche Kovarianzeigenschaften müssen für $\Lambda$ nicht mehr gezeigt werden, da sie sich von $\Gamma$ vererben. Wir müssen zeigen, dass $\Lambda$ bezüglich der rechten Modulstruktur und der rechten Komodulstruktur abgeschlossen ist. Als linkskovarianter Linksmodul ist $\Lambda$ frei mit einer freien Linksmodulbasis $\{\lambda_i \mid i \in K\} \subseteq \Lambda_{\mathrm{L}}$. Es seien $\lambda \in \Lambda$ und $a \in \mathcal{A}$. Dann existieren $a_i \in \mathcal{A}$ mit $\lambda = a_i\lambda_i$. Folglich ist

$$\lambda a = a_i\lambda_i\, a = a_i a_{(1)}\, S(a_{(2)})\lambda_i a_{(3)} = a_i a_{(1)}(\lambda_i \triangleleft a_{(2)}).$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\Lambda_{\mathrm{L}}$ unter der rechtsadjungierten Wirkung und der Abgeschlossenheit von $\Lambda$ unter der linken Wirkung folgt hieraus $\lambda a \in \Lambda$.
Wegen $\Delta_{\mathrm{R}}(\Lambda_{\mathrm{L}}) \subseteq \Lambda_{\mathrm{L}} \otimes \mathcal{A}$ gilt

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\Lambda) = \Delta_{\mathrm{R}}(\mathcal{A}\,\Lambda_{\mathrm{L}}) \subseteq \mathcal{A}\Lambda_{\mathrm{L}} \otimes \mathcal{A} = \Lambda \otimes \mathcal{A},$$

und der Beweis ist komplett. ∎

Ein Hopf-Bimodul heißt irreduzibel, falls er außer $\{0\}$ keinen echten Unter-Hopf-Bimodul enthält. Wie im Gruppenfall beweist man auch hier das Schursche Lemma:

> Jeder Morphismus zwischen irreduziblen Hopf-Bimoduln ist entweder ein Isomorphismus oder identisch Null. Jeder Endomorphismus eines irreduziblen Hopf-Bimoduls hat die Gestalt $c\,\mathrm{id}$ mit $c \in \mathbb{C}$.

Die folgenden Tatsachen zeigt man wie im klassischen Fall für Gruppen. Es sei $\Gamma$ ein irreduzibler Hopf-Bimodul. Dann sind die dualen Hopf-Bimoduln ${}^{\vee}\Gamma$ und $\Gamma^{\vee}$ ebenfalls irreduzibel. Es sei $A\colon \Lambda \to \Gamma$ ein Morphismus von Hopf-Bimoduln. Dann sind die Abbildungen ${}^{\vee}A\colon {}^{\vee}\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \to \mathcal{A}$ und $A^{\vee}\colon \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma^{\vee} \to \mathcal{A}$, gegeben durch

$${}^{\vee}A(\theta \otimes_{\mathcal{A}} \lambda) = g_{\mathrm{L}}(\theta \otimes_{\mathcal{A}} A(\lambda)) \quad \text{bzw.} \quad A^{\vee}(\lambda \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = g_{\mathrm{R}}(A(\lambda) \otimes_{\mathcal{A}} \eta) \tag{2.27}$$

Morphismen von Hopf-Bimoduln. Ist umgekehrt eine Abbildung ${}^{\vee}A$ bzw. $A^{\vee}$ wie oben gegeben, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus von Hopf-Bimoduln $A\colon \Lambda \to \Gamma$, so dass (2.27) erfüllt ist.

## 2.3 Differentialkalküle

In diesem Abschnitt wiederholen wir allgemeine Bezeichnungen und Fakten der von Woronowicz in [111] entwickelten Theorie der bikovarianten Differentialkalküle auf Hopfalgebren. Weiter gehende Ausführungen findet man im Kapitel 14 der Monographie [62].

### 2.3.1 Kovariante Differentialkalküle

**Definition 2.10** (i) Ein *Differentialkalkül erster Ordnung* über $\mathcal{A}$ (kurz DKEO) ist ein $\mathcal{A}$-Bimodul $\Gamma$ zusammen mit einer linearen Abbildung $\mathrm{d}\colon \mathcal{A} \to \Gamma$, welche die Leibnizregel $\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}a{\cdot}b + a{\cdot}\mathrm{d}b$ für $a,\ b \in \mathcal{A}$ erfüllt und für die $\Gamma = \langle a\,\mathrm{d}b \,|\, a, b \in \mathcal{A}\rangle$.
(ii) Man sagt, dass $\Gamma$ *linkskovariant* ist, falls es eine lineare Abbildung $\Delta_{\mathrm{L}}\colon \Gamma \to \mathcal{A}{\otimes}\Gamma$ gibt, so dass $\Delta_{\mathrm{L}}(a\mathrm{d}b) = \Delta(a)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{d})\Delta(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Entsprechend heißt $\Gamma$ *rechtskovariant*, falls es eine lineare Abbildung $\Delta_{\mathrm{R}}\colon \Gamma \to \Gamma{\otimes}\mathcal{A}$ gibt mit $\Delta_{\mathrm{R}}(a\mathrm{d}b) = \Delta(a)(\mathrm{d}\otimes\mathrm{id})\Delta(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Man nennt $\Gamma$ *bikovariant*, falls $\Gamma$ sowohl links- als auch rechtskovariant ist.

Im letzten Fall ist $(\Gamma, \Delta_{\mathrm{L}}, \Delta_{\mathrm{R}})$ ein Hopf-Bimodul [111, Proposition 1.4].
Es sei $\Gamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$. Eine zentrale Rolle spielt die folgende Abbildung $\omega\colon \mathcal{A} \to \Gamma_{\mathrm{L}}$, gegeben durch

$$\omega(a) = S(a_{(1)})\mathrm{d}a_{(2)}. \tag{2.28}$$

Man erkennt, dass $\omega = P_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}$. Wegen der Leibnizregel und $\omega(\widetilde{a}) = \omega(a)$ gilt

$$\omega(\widetilde{a}b) = \omega(a) \triangleleft b, \quad a, b \in \mathcal{A}. \tag{2.29}$$

Der Vektorraum $\mathcal{R} = \ker\varepsilon \cap \ker\omega$ ist ein Rechtsideal in $\widetilde{\mathcal{A}}$. Man nennt $\mathcal{R}$ das zum linkskovarianten Kalkül $\Gamma$ *assoziierte Rechtsideal*. Es sei $\{\omega_i \,|\, i \in K\}$ eine lineare Basis von $\Gamma_{\mathrm{L}}$. Dann existieren lineare Funktionale $X_i \in \mathcal{A}^\circ$, $i \in K$ mit $\omega(a) = \sum_{i\in K} X_i(a)\omega_i$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

**Definition 2.11** Der lineare Raum $\mathcal{X} := \{X \in \mathcal{A}^\circ \,|\, X(1) = X(r) = 0$ für alle $r \in \mathcal{R}\}$ heißt *Quanten-Tangentialraum* von $\Gamma$.

Es gilt $\mathcal{X} = \langle X_i \,|\, i \in K\rangle$. Ferner lässt sich das Differential $\mathrm{d}$ wie folgt schreiben:

$$\mathrm{d}a = \sum_{i\in K}(X_i * a)\omega_i \quad \text{für} \quad a \in \mathcal{A}. \tag{2.30}$$

Der linkskovariante DKEO $\Gamma$ ist bereits durch sein assoziiertes Rechtsideal $\mathcal{R}$ oder auch durch seinen Quanten-Tangentialraum $\mathcal{X}$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.
Ein DKEO $\Gamma$ heißt *innerer Differentialkalkül*, falls es ein Element $\rho \in \Gamma$ derart gibt, dass $\mathrm{d}a = \rho\, a - a\,\rho$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Wendet man auf diese Gleichung die linksinvariante Projektion $P_{\mathrm{L}}$ an, so erhält man mit Lemma 2.9 für alle $a \in \mathcal{A}$ und $r \in \mathcal{R}$

$$\omega(a) = \rho \triangleleft a - \varepsilon(a)\rho, \quad \rho \triangleleft r = 0. \tag{2.31}$$

Wir benötigen noch ein Resultat über die Dualität von $\Gamma$ und $\mathcal{X}$, vgl. etwa [111, Theorem 5.1] oder [62, Proposition 14.3].

**Lemma 2.16** *Es sei $\Gamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ und $\mathcal{X}$ sein Quanten-Tangentialraum. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \Gamma \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ mit*

$$\langle X, a\,\mathrm{d}b\rangle = \varepsilon(a)X(b) \quad \textit{für} \quad a, b \in \mathcal{A},\ X \in \mathcal{X}.$$

*Die Einschränkung dieser Bilinearform auf $\Gamma_{\mathrm{L}} \times \mathcal{X}$ ist nicht ausgeartet, und es gilt*

$$\langle \omega(a), X\rangle = X(a) \quad \textit{für} \quad a \in \mathcal{A},\ X \in \mathcal{X}.$$

Am Schluss dieses Abschnitts wollen wir Eigenschaften ergänzen, die nur für bikovariante DKEO auftreten.
Für $a \in \mathcal{A}$ definiert die Abbildung $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}$ eine rechte Komodulabbildung, die wir die *rechtsadjungierte Kowirkung* von $\mathcal{A}$ auf sich nennen. Man beachte, dass $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}$ auf $\mathcal{A}$ und $\triangleleft$ auf $\mathcal{A}^\circ$ zueinander duale Abbildungen sind, d. h. $(f \triangleleft g)(a) = (f \otimes g)\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ und $f, g \in \mathcal{A}^\circ$. Die Beweise der nächsten Aussagen findet man in [62, Abschnitt 14.2].

**Lemma 2.17** *Es sei $\Gamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$ ein bikovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ mit der Basis $\{\omega_i \mid i \in K\}$ von $\Gamma_{\mathrm{L}}$, assoziiertem Rechtsideal $\mathcal{R}$ und Quanten-Tangentialraum $\mathcal{X}$. Dann gilt für alle $a \in \mathcal{A}$*

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega(a)) = (\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}(a). \tag{2.32}$$

*Für alle $g \in \mathcal{A}^\circ$ und $i \in K$ gilt*

$$X_i \triangleleft g = g(v^i_j)X_j. \tag{2.33}$$

*Insbesondere ist $\mathcal{R}$ ein $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}$-invariantes Rechtsideal von $\widetilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{X}$ ein $\triangleleft$-invarianter Teilraum von $\mathcal{A}^\circ$.*

## 2.3.2 Bikovariante Differentialkalküle auf koquasitriangulären Hopfalgebren

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine koquasitrianguläre Hopfalgebra mit den universellen $r$-Formen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$, die sich meist nur um einen Charakter unterscheiden. Ferner sei $\boldsymbol{v} = (v^i_j)_{i,j=1,\dots,d}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$.
Der Ausgangspunkt für die Konstruktion von bikovarianten Differentialkalkülen auf $\mathcal{A}$ ist die Feststellung, dass durch die Paare

$$\Gamma^{\pm}_{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\ell}^{\pm,\mathrm{c}}_{\boldsymbol{s}}) \quad \text{und} \quad {}^{\vee}\Gamma^{\pm}_{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\ell}^{\pm}_{\boldsymbol{r}}), \tag{2.34}$$

in der Notation von Theorem 2.11, Hopf-Bimoduln über $\mathcal{A}$ gegeben sind. Es ist nicht schwer, die Verträglichkeitsrelation (2.19) zu beweisen, [62, S. 518 oben].
Zur Konstruktion von bikovarianten Differentialkalkülen über $\mathcal{A}$ benutzen wir geeignete Tensorprodukte der obigen Hopf-Bimoduln und sichern damit die Existenz eines biinvarianten Elements. Wir definieren die Hopf-Bimoduln

$$\Gamma_+ = \Gamma^-_{\boldsymbol{s}} \otimes_{\mathcal{A}} {}^{\vee}\Gamma^+_{\boldsymbol{r}} \quad = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\ell}^{-,\mathrm{c}}_{\boldsymbol{s}} \otimes \boldsymbol{\ell}^+_{\boldsymbol{r}}), \tag{2.35}$$

$$\Gamma_- = {}^{\vee}\Gamma_+ = {}^{\vee\vee}\Gamma^+_{\boldsymbol{r}} \otimes_{\mathcal{A}} {}^{\vee}\Gamma^-_{\boldsymbol{s}} = (\boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}} \otimes \boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, {}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{\ell}^+_{\boldsymbol{r}} \otimes \boldsymbol{\ell}^-_{\boldsymbol{s}}). \tag{2.36}$$

Die Strukturabbildungen von $\Gamma_\tau$, $\tau \in \{+,-\}$ können wie folgt beschrieben werden. Der Vektorraum $\Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$ hat eine Basis $\{\omega^\tau_{ij} \mid i, j = 1, \dots, d\}$, so dass die rechte Wirkung und die rechte

Kowirkung die folgende Gestalt haben

$$\begin{aligned}\omega^+_{ij}\,a &= a_{(1)}S(\ell^{-m}_{\boldsymbol{s}\;i})\ell^{+j}_{\boldsymbol{r}\;n}(a_{(2)})\omega^+_{mn},\\ \omega^+_{ij}\,a &= a_{(1)}\boldsymbol{s}(v^m_i, a_{(2)})\boldsymbol{r}(a_{(3)}, v^j_n)\omega^+_{mn},\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega^+_{ij}) = \omega^+_{mn}\otimes v^m_i S(v^j_n).\tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\omega^-_{ij}\,a &= a_{(1)}S^{-1}(\ell^{+m}_{\boldsymbol{r}\;i})\ell^{-j}_{\boldsymbol{s}\;n}(a_{(2)})\omega^-_{mn},\\ \omega^-_{ij}\,a &= a_{(1)}\boldsymbol{r}(a_{(2)}, S(v^m_i))\boldsymbol{s}(S(v^j_n), a_{(3)})\omega^-_{mn},\end{aligned}\tag{2.39}$$

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega^-_{ij}) = \omega^-_{mn}\otimes S^2(v^m_i)S(v^j_n).\tag{2.40}$$

Wir setzen $\omega^+_0 := \sum_i \omega^+_{ii}$ und, mit einer invertierbaren Matrix $D \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}}, \boldsymbol{v})$, $\omega^-_0 := \sum_{i,j}(D^{-1})^i_j\omega^-_{ij}$. Dann ist $\omega^\tau_0$ biinvariant. Für $a \in \mathcal{A}$ definieren wir nun

$$\mathrm{d}a = \omega^\tau_0\,a - a\,\omega^\tau_0.\tag{2.41}$$

Die zugehörigen $\omega$-Abbildungen, siehe (2.31), bezeichnen wir mit $\omega^\tau$, $\tau \in \{+,-\}$. Damit ist die Konstruktion von zwei zu $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ assoziierten Differentialkalkülen abgeschlossen, [62, Proposition 14.20].

**Satz 2.18** *Für beide Konstruktionen ist der Hopf-Bimodul $\Gamma := \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathcal{A}$ ein bikovarianter Differentialkalkül erster Ordnung über $\mathcal{A}$ mit dem Differential* $\mathrm{d}$.

**Bemerkung 2.7** (i) Die Dimension des Quanten-Tangentialraumes $\mathcal{X}$ ist höchstens gleich $d^2$, $d = \mathrm{rg}(\boldsymbol{v})$. Tatsächlich gibt es Fälle, in denen diese Dimension echt kleiner als $d^2$ ist, etwa im Falle einer kommutativen Hopfalgebra $\mathcal{A}$ mit den universellen $r$-Formen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} = \varepsilon\times\varepsilon$. Hier ist $\mathrm{d}a \equiv 0$, also $\dim\mathcal{X} = 0$.
(ii) Die oben angegebene Idee zur Konstruktion bikovarianter Differentialkalküle taucht erstmals in den Arbeiten [57] und [17] auf, jedoch noch nicht in dieser Allgemeinheit, sondern nur für die Quantengruppen $\mathcal{O}(G_q)$, deren kanonische $r$-Form und die fundamentale Matrixkodarstellung $\boldsymbol{u}$. □

Es sei $\tau \in \{+,-\}$ und $\mathcal{X}^\tau$ der Quanten-Tangentialraum des oben konstruierten Kalküls. Wir setzen voraus, dass beide oben konstruierten Kalküle $d^2$-dimensional sind. Dann gilt $\Gamma = \Gamma_\tau$, und $\{\omega^\tau_{ij}\}$ ist eine freie Linksmodulbasis von $\Gamma$. Wegen (2.31) und $\omega^\tau(a) = \sum_{i,j} X^\tau_{ij}(a)\omega^\tau_{ij}$ erhält man als Dualbasis $\{X^\tau_{ij}\} \subseteq \mathcal{A}^\circ$ zu $\{\omega^\tau_{ij}\}$ die Elemente

$$\begin{aligned}X^+_{ij} &= S(\ell^{-i}_{\boldsymbol{s}\;k})\ell^{+k}_{\boldsymbol{r}\;j} - \delta_{ij},\\ X^-_{ij} &= (D^{-1})^m_n S^{-1}(\ell^{+i}_{\boldsymbol{r}\;m})\ell^{-n}_{\boldsymbol{s}\;j} - (D^{-1})^i_j.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Die $d^2$ Elemente $X^\tau_{ij}$ sind dann linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathcal{X}^\tau$.
Mit $\sigma$ bezeichnen wir wieder die Zopfung von Hopf-Bimoduln. Aus (2.25) und (2.37) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\sigma(\omega^+_{ij}\otimes_{\mathcal{A}}\omega^+_{kl}) &= f^{ij}_{rs}((\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}})^{mn}_{kl})\omega^+_{mn}\otimes_{\mathcal{A}}\omega^+_{rs}\\ &= \boldsymbol{s}(v^r_i, v^m_x(v^{\mathrm{c}})^n_y)\boldsymbol{r}(v^x_k(v^{\mathrm{c}})^y_l, v^j_s)\omega^+_{mn}\otimes_{\mathcal{A}}\omega^+_{rs}\\ &= \boldsymbol{s}(v^t_i, v^m_x)\boldsymbol{s}(v^r_t, S(v^y_n))\boldsymbol{r}(v^x_k, v^j_z)\boldsymbol{r}(S(v^l_y), v^z_s)\omega^+_{mn}\otimes_{\mathcal{A}}\omega^+_{rs}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Analog zeigt man

$$\sigma(\omega^-_{ij} \otimes_{\mathcal{A}} \omega^-_{kl}) = \boldsymbol{s}(S(v^m_x), v^t_i)\boldsymbol{s}(v^y_n, v^r_t)\boldsymbol{r}(v^z_s, v^l_y)\boldsymbol{r}(v^j_z, S(v^x_k))\omega^-_{mn} \otimes_{\mathcal{A}} \omega^-_{rs}.$$

### 2.3.3 Bikovariante Differentialkalküle auf $\mathcal{O}(G_q)$

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra $\mathcal{O}(G_q)$ zu einer der Quantengruppen $G_q = \mathrm{GL}_q(N)$, $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{O}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ oder $\mathrm{Sp}_q(N)$. Es seien $x$ und $y$ für $G_q$ zulässige Parameter, vgl. Satz 2.6. Wir setzen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ sowie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_x$ und $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_y$; ferner sei $z := xy$. Diese Zahlen $z$ nennen wir *$\Gamma$-zulässig* . Dann bezeichnen wir den bikovarianten DKEO $\Gamma_+$ aus dem obigen Abschnitt mit $\Gamma_{+,z}$ und den DKEO $\Gamma_-$ mit $\Gamma_{-,z}$. Aus der unten stehenden Beschreibung wird klar werden, dass die Kalküle tatsächlich nur vom Produkt $xy$ abhängen, so dass die obige Schreibweise gerechtfertigt ist. In [95, Theoreme 2.9 und 2.10] wurde gezeigt, dass $\dim(\Gamma_{\tau,z})_{\mathrm{L}} = N^2$, so dass die entsprechenden Elemente des Quanten-Tangentialraumes $X^\tau_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, N$ linear unabhängig sind. Wir beschreiben nun diese Kalküle näher. Wir wollen vereinbaren, dass die Funktionale $\ell^{-i}_{\ j}$ stets gleich $\overline{\boldsymbol{r}}_y(u^i_j, \cdot)$ und die Funktionale $\ell^{+i}_{\ j}$ stets gleich $\boldsymbol{r}_x(\cdot, u^i_j)$ sind, vgl. (2.13), so dass die Vorzeichen $\pm$ den zulässigen Parameter $x$ bzw. $y$ in der $r$-Form festlegen. Nun definieren wir die invertierbare Diagonalmatrix $D = (d_i\delta_{ij})$, $D \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{cc}}, \boldsymbol{u})$. Im Fall $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ setzen wir $d_i = q^{N+1-2i}$ und $\mathfrak{r} = q^N$. Für die Quantengruppen der B-, C- und D-Serien setzen wir $D = C^{\mathrm{t}}B$ und $\mathfrak{r} = \epsilon q^{N-\epsilon}$. Für alle vier Serien sei $\mathfrak{s} := \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} D^{-1}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Definition von $\mathfrak{s}$ mit der aus Abschnitt 2.1.4 für die orthogonalen und symplektischen Quantengruppen übereinstimmt. Es sei $\{\omega^\tau_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, N\}$ eine lineare Basis des linksinvarianten Formenraums von $\Gamma_{\tau,z}$. Die rechte Kowirkung $\Delta_{\mathrm{R}}(\rho)$ und die rechte Wirkung $\rho \triangleleft a$ mit $\rho \in (\Gamma_{\tau,z})_{\mathrm{L}}$ und $a \in \mathcal{A}$ sind dann gegeben durch

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega^+_{ij}) = \omega^+_{kl} \otimes (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{kl}_{ij}, \qquad \Delta_{\mathrm{R}}(\omega^-_{ij}) = \omega^-_{kl} \otimes (\boldsymbol{u}^{\mathrm{cc}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{kl}_{ij}, \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} \omega^+_{ij} \triangleleft a &= S(\ell^{-k}_{\ \ i})\ell^{+j}_{\ \ l}(a)\omega^+_{kl} &&= \boldsymbol{r}_y(u^k_i, a_{(1)})\boldsymbol{r}_x(a_{(2)}, u^j_l)\omega^+_{kl}, \\ \omega^-_{ij} \triangleleft a &= S^{-1}(\ell^{+k}_{\ \ i})\ell^{-j}_{\ \ l}(a)\omega^-_{kl} &&= \boldsymbol{r}_y(a_{(1)}, S(u^k_i))\boldsymbol{r}_x(S(u^j_l), a_{(2)})\omega^-_{kl}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Es sind also $\Gamma_{+,z} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{\ell}^{-\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{\ell}^+)$ und $\Gamma_{-,z} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{cc}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}, {}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{\ell}^+ \otimes \boldsymbol{\ell}^-)$. Die Kalküle besitzen jeweils ein bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmtes biinvariantes Element $\omega^+_0 = \sum_{i=1}^N \omega^+_{ii} \in \Gamma_{+,z}$ und $\omega^-_0 = \sum_{i=1}^N d_i^{-1}\omega^-_{ii} \in \Gamma_{-,z}$. Insbesondere ergibt sich durch Einsetzen von $a := u^m_n$ in (2.45):

$$\begin{aligned} \omega^+_{ij} \triangleleft u^m_n &= z^{-1}\hat{R}^{mk}_{iv}\hat{R}^{jv}_{nl}\,\omega^+_{kl}, & \omega^+_0 \triangleleft u^m_n &= z^{-1}(\hat{R}^2)^{mk}_{nl}\,\omega^+_{kl}, \\ \omega^-_{ij} \triangleleft u^m_n &= zd_id_k^{-1}(\hat{R}^{-1})^{mk}_{iv}(\hat{R}^{-1})^{jv}_{nl}\,\omega^-_{kl}, & \omega^-_0 \triangleleft u^m_n &= zd_k^{-1}(\hat{R}^{-2})^{mk}_{nl}\,\omega^-_{kl}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Es sei $\{X^\tau_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, N\}$ eine Basis des Quanten-Tangentialraumes $\mathcal{X}^\tau$ von $\Gamma_{\tau,z}$ dual zur Basis $\{\omega^\tau_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, N\}$. Aus (2.42) ergibt sich

$$\begin{aligned} X^+_{ij} &= S(\ell^{-i}_{\ \ k})\ell^{+k}_{\ \ j} - \delta_{ij}, & X^+_0 &= \mathfrak{s}^{-1}(D^{-1})^i_j X^+_{ij}, \\ X^-_{ij} &= d_i^{-1}\big(S(\ell^{+i}_{\ \ k})\ell^{-k}_{\ \ j} - \delta_{ij}\big), & X^-_0 &= \mathfrak{s}^{-1}\textstyle\sum_i X^-_{ii}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Im Fall $\tau = -$ benutzten wir $S^2(\boldsymbol{\ell}^{\pm}) = D\boldsymbol{\ell}^{\pm}D^{-1}$, was aus Satz 2.7 (ii), Satz 2.3 und Satz 2.4 folgt. Dabei bezeichnet $X_0^\tau$ das zu $\omega_0^\tau$ duale Basiselement bezüglich der Zerlegung der Kodarstellung $\Delta_{\mathrm{R}}$ auf $(\Gamma_{\tau,z})_{\mathrm{L}}$ in irreduzible Komponenten. Die entsprechenden Projektoren in $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ und $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{cc}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ sind

$$(P_0^+)^{ij}_{kl} = \frac{1}{\mathfrak{s}}\, d_k^{-1}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad \text{bzw.} \quad (P_0^-)^{ij}_{kl} = \frac{1}{\mathfrak{s}}\, d_i^{-1}\delta_{ij}\delta_{kl}.$$

Man beachte, dass $X_0^\tau$ wegen (2.33) in $\mathcal{A}^\circ$ zentral ist, und es gilt $S(X_0^+) = X_0^-$. Es sei $X_0 := X_0^+ + X_0^-$.
Für eine komplexe $N^2 \times N^2$-Matrix $\hat{T}$ mit der Eigenschaft $\hat{T} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ definieren wir die Matrizen

$$\check{T}^{ab}_{st} := \hat{T}^{ts}_{ba}, \quad \acute{T}^{ab}_{st} := \hat{T}^{sa}_{tb} \quad \text{und} \quad \grave{T}^{-} := (\acute{T})^{-1}. \tag{2.48}$$

Dann gilt $\acute{T} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ und $\check{T} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$. Weitere Eigenschaften findet man im Anhang A.
Wir berechnen die Matrixelemente der Zopfung auf $\Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+$. Nach Formel (2.43) ergibt sich mit (A.1), da sich die Normierungskoeffizienten $x$, $y$, $x^{-1}$ und $y^{-1}$ wegheben:

$$\sigma^{mn\,rs}_{ij\,kl} = \grave{R}^{-nr}_{ty}\hat{R}^{mt}_{ix}(\hat{R}^{-1})^{lz}_{sy}\hat{R}^{jx}_{kz} = \big(\grave{R}^{-}_{23}\hat{R}_{12}\check{R}^{-1}_{34}\acute{R}_{23}\big)^{mn\,rs}_{ij\,kl}. \tag{2.49}$$

Unter Verwendung des graphischen Kalküls, vergleiche Anhang A, ergibt sich die folgende Darstellung dieser Matrix.

$\sigma^{mn\,rs}_{ij\,kl} =$

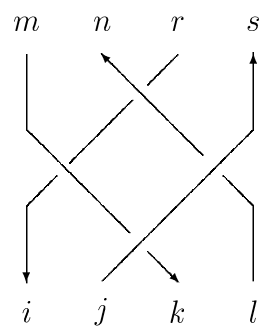



Abbildung 2.1: Die graphische Darstellung der Zopfung $\sigma$.

Um die Schreibweisen zu vereinfachen, schreiben wir mitunter $\Gamma_\tau$ anstelle von $\Gamma_{\tau,z}$.

# Kapitel 3

# Äußere Algebren und Kalküle höherer Ordnung

In diesem Kapitel stellen wir zunächst die drei bekannten Möglichkeiten vor, zu einem kovarianten Differentialkalkül erster Ordnung eine äußere Algebra und damit einen differentiellen Komplex zu konstruieren. Dies sind Woronowicz' äußere Algebra, die quadratische und die universelle äußere Algebra. Einfache Hilfssätze zu universellen Differentialkalkülen werden bereitgestellt. Mit Hilfe der Dualität von $\Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\mathcal{X}$ konnte eine Methode gefunden werden, die Größe des Raumes ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ der linksinvarianten universellen 2-Formen zu bestimmen. Die ersten Hauptresultate dieses Kapitels sind die Theoreme 3.11 und 3.12. Hier werden die Poincaré-Reihen von Woronowicz' äußeren Algebren (links- und biinvariante Formen) zu den Standardkalkülen auf den Quantengruppen der A-Serie angegeben. Es wird gezeigt, dass die biinvarianten Formen eine graduiert kommutative Algebra bilden. Biinvariante Formen sind geschlossen, und verschiedene biinvariante Formen repräsentieren verschiedene de-Rham-Kohomologieklassen. Als entscheidendes Hilfsmittel zum Beweis der Poincaré-Reihen werden im Abschnitt 3.3 Iwahori-Hecke-Algebren benutzt. Die Resultate aus Abschnitt 3.3.2 sind neu und speziell auf die Vereinfachung von Woronowicz' Antisymmetrisator zugeschnitten. Abschnit 3.4 enthält bekannte aber auch neue Sätze (Lemma 3.26 und Satz 3.30) zur Kodarstellungstheorie von Koordinatenhopfalgebren. Die Beweise des ersten Hauptresultates werden dann abgeschlossen.

Das zweite Hauptresultat dieses Kapitels, Theorem 3.13, stellt Größenvergleiche zwischen den drei verschiedenen äußeren Algebren an. Relativ einfach ist der Vergleich von Woronowicz' äußerer Algebra und der quadratischen äußeren Algebra. Er stützt sich im Wesentlichen auf die Dualität von ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ und der Spiegelungsgleichungsalgebra im Sinne von quadratischen Algebren. Der Vergleich von quadratischer und universeller äußerer Algebra geschieht in drei Schritten. Im ersten Schritt wird gezeigt, dass die zwei (im Falle der A-Serie) bzw. drei (im Falle der B-, C- und D-Serien) biinvarianten Elemente von $\Gamma^{\otimes 2}$ bereits den gesamten Kern des Antisymmetrisators $A_2$ als Unter-Hopf-Bimodul erzeugen. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass gewisse biinvariante Elemente von $\Gamma^{\otimes 2}$ im Unter-Hopf-Bimodul $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ liegen. Im Falle der A-Serie mit $N \geq 3$ ist das Ziel hiermit schon erreicht. Für die orthogonalen und symplektischen Quantengruppen und für den Ausnahmefall $N = 2$ bei der A-Serie wird im dritten Schritt gezeigt, dass der biinvariante 2-Tensor $\eta^0$ nicht in $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ liegt. Mit diesen drei Eigenschaften lässt sich der

Vergleich von ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ und ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$ vollziehen.

## 3.1 Äußere Algebren über Hopf-Bimoduln

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für eine Theorie der Differentialkalküle höherer Ordnung auf Quantengruppen gelegt. Wir werden sehen, dass die Tensoralgebra über einem Hopf-Bimodul eine Super-Hopf-Struktur trägt, die sich auch auf die äußeren Algebren vererbt, vergleiche auch [10, 15] oder [62, Abschnitt 13.2].
Es sei $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul. Wir setzen $\Gamma^{\otimes 0} := \mathcal{A}$, $\Gamma^{\otimes 1} := \Gamma$, $\Gamma^{\otimes n} := \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ ($n$ Faktoren) und $\Gamma^{\otimes} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{\otimes n}$. Nach dem Ergebnis des vorigen Abschnitts sind dann die Räume $\Gamma^{\otimes}$ und $\Gamma^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ebenfalls Hopf-Bimoduln. Außerdem ist $\Gamma^{\otimes}$ in natürlicher Weise eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra.

**Definition 3.1** Eine *Super-Hopfalgebra* ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra $\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{A}_n$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(i) $\mathcal{A}$ ist eine graduierte Koalgebra, d. h., $\mathcal{A}$ ist eine Koalgebra mit

$$\Delta(\mathcal{A}_n) \subseteq \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und $\varepsilon(\mathcal{A}_n) = \{0\}$ für $n \geq 1$.
(ii) Das Koprodukt $\Delta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ und die Koeins $\varepsilon\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ sind graduierte Algebrenhomomorphismen. Dabei ist das Produkt in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ gegeben durch

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) := (-1)^{kn} ac \otimes bd,$$

wobei $b \in \mathcal{A}_k$, $c \in \mathcal{A}_n$ und $a$, $d \in \mathcal{A}$.
(iii) Es gibt eine lineare Abbildung $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $S(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{A}_n$, welche die Antipodenbedingungen einer Hopfalgebra erfüllt.

Man kann zeigen, dass für den Antipoden $S$ einer Super-Hopfalgebra stets gilt

$$S(bc) = (-1)^{kn} S(c)S(b) \quad \text{mit } b \in \mathcal{A}_k \text{ und } c \in \mathcal{A}_n. \tag{3.1}$$

Wir zitieren [62, Proposition 13.7]:

**Satz 3.1** *Die $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra $\Gamma^{\otimes}$ ist eine Super-Hopfalgebra, wobei die Strukturabbildungen $\Delta_{\otimes}$, $\varepsilon_{\otimes}$ und $S_{\otimes}$ die Strukturabbildungen von $\mathcal{A}$ fortsetzen und für $\rho \in \Gamma$ durch*

$$\Delta_{\otimes}(\rho) = \Delta_{\mathrm{L}}(\rho) + \Delta_{\mathrm{R}}(\rho), \quad \varepsilon_{\otimes}(\rho) = 0, \tag{3.2}$$
$$S_{\otimes}(\rho) = -S(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}S(\rho_{(1)}) \tag{3.3}$$

*gegeben sind.*

### 3.1.1 Die äußeren Algebren ${}_{\mathrm{w}}\Gamma^{\wedge}$ und ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{S}_k$ die symmetrische Gruppe der Menge $\{1,\dots,k\}$. Es sei $s_i = (i, i+1) \in \mathrm{S}_k$, $i = 1,\dots,k-1$ die Transposition, die $i$ und $i+1$ miteinander vertauscht. Dann kann jede Permutation $w \in \mathrm{S}_k$, $w \neq 1$ in der Form $w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ mit gewissen $i_n \in \{1,\dots,k-1\}$, $r \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Das kleinstmögliche $r$ heißt *Länge* von $w$ und wird mit $\ell(w)$ bezeichnet. Jede Darstellung von $w$ als Produkt von $\ell(w)$ Transpositionen $s_i$ heißt *reduzierte Zerlegung* von $w$. Wir benutzen die folgende elementare Eigenschaft der symmetrischen Gruppe, vergleiche etwa [13]: $\ell(ws_i) \in \{\ell(w)-1, \ell(w)+1\}$, $w \in \mathrm{S}_k$, $i = 1,\dots,k-1$. Die Elemente der Menge

$$\mathrm{C}_{i,k-i} = \{p \in \mathrm{S}_k \,|\, p(m) < p(n) \text{ für } 1 \leq m < n \leq i \text{ und } i+1 \leq m < n \leq k\}$$

werden *Schiebepermutationen* (engl. shuffle permutation) genannt. Jede Permutation $p \in \mathrm{S}_k$ gestattet eine eindeutige Zerlegung $p = p_1p_2p_3$ mit $p_1 \in \mathrm{C}_{i,k-i}$, wobei $p_2 \in \mathrm{S}_k$ und $p_3 \in \mathrm{S}_k$ die Elemente $i+1,\dots,k$ bzw. $1,\dots,i$ unverändert lassen. Außerdem gilt $\ell(p) = \ell(p_1) + \ell(p_2) + \ell(p_3)$.

*Anheben in Artins Zopfgruppe.* Die *Zopfgruppe* $\mathrm{B}_k$ ist die von den Generatoren $b_1,\dots,b_{k-1}$ und den Relationen

$$b_ib_{i+1}b_i = b_{i+1}b_ib_{i+1}, \qquad i = 1,\dots,k-2, \tag{3.4}$$
$$b_ib_j = b_jb_i, \qquad |i-j| \geq 2. \tag{3.5}$$

erzeugte Gruppe. Die Abbildung $b_i \mapsto s_i$ definiert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{B}_k$ auf $\mathrm{S}_k$. Umgekehrt ordnen wir jeder reduzierten Zerlegung $w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ das Zopfgruppenelement $b_w = b_{i_1}\cdots b_{i_r}$ zu. Wegen (3.4) und (3.5) hängt diese Zuordnung $b_w$ nicht von der Wahl der reduzierten Zerlegung $s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ ab. Ferner gilt $b_{vw} = b_vb_w$, falls $\ell(vw) = \ell(v)+\ell(w)$. Dies ist insbesondere auf die Schiebezerlegung einer Permutation $w$ anwendbar: $w = p_1p_2p_3$ liefert $b_w = b_{p_1}b_{p_2}b_{p_3}$. In der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{B}_k$ definieren wir nun den Antisymmetrisator und die den Schiebepermutationen zugeordneten Zopfsummen:

$$\boldsymbol{A}_k = \sum_{w \in \mathrm{S}_k} \operatorname{sgn}(w) b_w, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{A}_{i,k-i} = \sum_{w \in \mathrm{C}_{i,k-i}} \operatorname{sgn}(w) b_w, \qquad \boldsymbol{B}_{i,k-i} = \sum_{w^{-1} \in \mathrm{C}_{i,k-i}} \operatorname{sgn}(w) b_w. \tag{3.7}$$

Aufgrund der Schiebezerlegung erhalten wir für $1 \leq i < k$, $\boldsymbol{A}_1 = 1$:

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_{i,k-i}(\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_{k-i}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}_k = (\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_{k-i})\boldsymbol{B}_{i,k-i}. \tag{3.8}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{1,i} &= 1 - b_1 + b_2b_1 - \cdots + (-1)^i b_i \cdots b_1,\\
\boldsymbol{A}_{i,1} &= 1 - b_i + b_{i-1}b_i - \cdots + (-1)^i b_1 \cdots b_i,\\
\boldsymbol{B}_{1,i} &= 1 - b_1 + b_1b_2 - \cdots + (-1)^i b_1 \cdots b_i,\\
\boldsymbol{B}_{i,1} &= 1 - b_i + b_ib_{i-1} - \cdots + (-1)^i b_i \cdots b_1.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass die folgenden Rekursionsbeziehungen für $i \geq 1$ gelten:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{1,i} &= \mathrm{id} - (\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{A}_{1,i-1})b_1, & \boldsymbol{A}_{i,1} &= \mathrm{id} - (\boldsymbol{A}_{i-1,1} \otimes \mathrm{id})b_i, \\ \boldsymbol{B}_{1,i} &= \mathrm{id} - b_1(\mathrm{id} \otimes \boldsymbol{B}_{1,i-1}), & \boldsymbol{A}_{i,1} &= \mathrm{id} - b_i(\boldsymbol{B}_{i-1,1} \otimes \mathrm{id}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Mit $w_\circ$ bezeichnen wir das längste Wort in $\mathrm{S}_k$. Diese Permutation bildet das Tupel $(1, \dots, k)$ auf das Tupel $(k, \dots, 1)$ ab. Für eine reduzierte Zerlegung $w = s_{n_1} \cdots s_{n_r}$ definieren wir $\overline{w} = s_{\overline{n_1}} \cdots s_{\overline{n_r}}$, wobei $\overline{n} = k - n$. Offenbar hängt $\overline{w}$ nicht von der Wahl der reduzierten Zerlegung ab. Wegen $s_n w_\circ = w_\circ s_{k-n}$ und $\ell(\overline{w}) = \ell(w)$ hat man

$$b_w b_{w_\circ} = b_{w_\circ} b_{\overline{w}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}_k b_{w_\circ} = b_{w_\circ} \boldsymbol{A}_k. \tag{3.11}$$

Wir kommen nun zu Woronowicz' Konstruktion [111, Proposition 3.1] der äußeren Algebra. Es sei $\sigma$ die Zopfung des bikovarianten Bimoduls $\varGamma \otimes_{\mathcal{A}} \varGamma$. Für $i = 1, \dots, k-1$ definieren wir einen Automorphismus $\sigma_i$ des Hopf-Bimoduls $\varGamma^{\otimes k}$ durch $\sigma_i = \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}$, wobei die Zopfung $\sigma$ an der Stelle $(i, i+1)$ des Tensorproduktes $\varGamma^{\otimes k}$ wirkt. Da $\sigma$ die Zopfrelation erfüllt, genügen die Automorphismen $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ den erzeugenden Relationen der Zopfgruppe $\mathrm{B}_k$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $x \mapsto \gamma(x)$ von $\mathrm{B}_k$ in die Automorphismen von $\varGamma^{\otimes k}$, der $b_i$ auf $\sigma_i$ abbildet. Wir schreiben kurz $\sigma_w = \gamma(b_w)$, $w \in \mathrm{S}_k$ für den der Permutation $w$ entsprechenden Automorphismus von $\varGamma^{\otimes k}$. Der Homomorphismus $\gamma$ lässt sich auf die Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{B}_k$ fortsetzen und nimmt dann Bilder in den Endomorphismen von $\varGamma^{\otimes k}$ an. Wir setzen $A_k = \gamma(\boldsymbol{A}_k)$, $A_{i,k-i} = \gamma(\boldsymbol{A}_{i,k-i})$ und $B_{i,k-i} = \gamma(\boldsymbol{B}_{i,k-i})$. Der Endomorphismus $A_k$ heißt *Woronowicz' Antisymmetrisator* von $\varGamma^{\otimes k}$. Die obigen Konstruktionen sind für alle Darstellungen der Zopfgruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{B}_k$ möglich. Ersetzt man überall $\sigma$ durch $\sigma^{-1}$, so erhält man ebenfalls eine wohldefinierte Darstellung. Da wir im folgenden beide Arten von Operatoren benötigen, schreiben wir $A_k^\pm$, $A_{i,j}^\pm$ und $B_{i,j}^\pm$ wenn wir mit $\sigma^{\pm 1}$ arbeiten.
Wegen (3.8) ist ${}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J} := \bigoplus_{k \geq 2} \ker A_k$ ein zweiseitiges Ideal und ein Hopf-Bimodul. Folglich ist ${}_{\mathrm{W}}\varGamma^\wedge = \varGamma^\otimes / {}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J}$ eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra und ein Hopf-Bimodul. Wir nennen ${}_{\mathrm{W}}\varGamma^\wedge = \bigoplus_{k \geq 0} {}_{\mathrm{W}}\varGamma^{\wedge k}$ *Woronowicz' äußere Algebra* zum gegebenen Hopf-Bimodul $\varGamma$. Anstelle des Ideals ${}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J}$ kann man auch das von $\ker A_2$ erzeugte Ideal ${}_{\mathrm{s}}\mathfrak{J} := \langle \ker(I - \sigma) \rangle_{\mathrm{Ideal}}$ der Tensoralgebra $\varGamma^\otimes$ betrachten. Wir nennen ${}_{\mathrm{s}}\varGamma^\wedge := \varGamma^\otimes / {}_{\mathrm{s}}\mathfrak{J} = \bigoplus_{k \geq 0} {}_{\mathrm{s}}\varGamma^{\wedge k}$ die *quadratische äußere Algebra*. Wegen (3.8) gilt ${}_{\mathrm{s}}\mathfrak{J} \subseteq {}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J}$. Daher ist ${}_{\mathrm{W}}\varGamma^\wedge$ ein Quotient von ${}_{\mathrm{s}}\varGamma^\wedge$. Natürlich sind sowohl ${}_{\mathrm{W}}\varGamma^\wedge$ als auch ${}_{\mathrm{s}}\varGamma^\wedge$ Algebren und Hopf-Bimoduln. Darüber hinaus erben sie auch die Super-Hopf-Struktur von $\varGamma^\otimes$. Wir zitieren das entsprechende Resultat aus [62, Teilabschnitt 13.2.2].

**Satz 3.2** *Es sei $\varGamma$ ein Hopf-Bimodul mit der kanonischen Zopfung $\sigma$ von $\varGamma^{\otimes 2}$. Dann sind Woronowicz' äußere Algebra ${}_{\mathrm{W}}\varGamma^\wedge$ und die quadratische äußere Algebra ${}_{\mathrm{s}}\varGamma^\wedge$ $\mathbb{N}_0$-graduierte Super-Hopfalgebren.*

Da $\varGamma^{\otimes k}$ ein freier linker $\mathcal{A}$-Modul ist, können wir die Räume $(\varGamma^{\otimes k})_{\mathrm{L}}$ und $\varGamma_{\mathrm{L}} \otimes \cdots \otimes \varGamma_{\mathrm{L}}$ ($k$ Faktoren) miteinander identifizieren.
Im nächsten Satz zeigen wir, dass die Wirkung des Antipoden $S$ auf biinvarianten $k$-Tensoren (bzw. $k$-Formen) bis auf das Vorzeichen mit der Wirkung des längsten Wortes übereinstimmt.
Es sei $\{\theta_i\}$ eine Vektorraumbasis von $\varGamma_{\mathrm{L}}$. In der Notation von Theorem 2.11 sei bezüglich dieser Basis $\varGamma = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f})$. Dann bilden die Elemente $\eta_i = \sum_j \theta_j S(v_i^j)$ eine lineare Basis von $\varGamma_{\mathrm{R}}$, wobei $\theta_i = \sum_j \eta_j v_i^j$ gilt, siehe [111, (2.38)].

**Satz 3.3** *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra und $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul über $\mathcal{A}$ mit der Zopfung $\sigma$. Es bezeichne $S$ den Antipoden der $\mathbb{N}_0$-graduierten Super-Hopfalgebra $\Gamma^{\otimes}$. Dann gilt für alle biinvarianten Elemente $\rho \in \Gamma^{\otimes k}_{\mathrm{Inv}}$, $k \geq 2$:*

$$S(\rho) = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}\sigma_{w_\circ}(\rho). \tag{3.12}$$

*Dabei ist $w_\circ$ das längste Wort in $\mathrm{S}_k$ und $\sigma_{w_\circ}$ der entsprechende Hopf-Bimodul-Automorphismus von $\Gamma^{\otimes k}$. Die Gleichung gilt auch für $\rho \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$.*

*Beweis*. (a) Wir summieren über doppelt auftretende Multiindizes. Für einen Multiindex $\vec{\imath} = (i_1, \ldots, i_k)$ bezeichne $\overleftarrow{\imath} = (i_k, \ldots, i_1)$ die umgekehrte Indexfolge. Ferner schreiben wir $\theta_{\vec{\imath}}$ für das Produkt $\theta_{i_1} \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{i_k}$, entsprechend bedeutet $\eta_{\overleftarrow{\jmath}} := \eta_{j_k} \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{j_1}$. Aufgrund von [62, Proposition 13.8] gilt $S(\theta_{\vec{\imath}}) = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}\eta_{\overleftarrow{\imath}}$.
(b) Mit Hilfe vollständiger Induktion über $k$ wird nun gezeigt, dass für alle $k \geq 2$

$$\eta_{\overleftarrow{\jmath}}\, v^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = \sigma_{w_\circ}(\theta_{\vec{\imath}}) \tag{3.13}$$

gilt. Wegen $\eta_j v^j_i = \theta_i$, $\theta_i \triangleleft a = f^i_n(a)\theta_n$ und (2.25), erhalten wir

$$\eta_{j_2} \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{j_1} v^{j_1}_{i_1} v^{j_2}_{i_2} = \eta_{j_2} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{i_1}\, v^{j_2}_{i_2} = \eta_{j_2} v^{j_2}_x f^{i_1}_y(v^x_{i_2}) \otimes_{\mathcal{A}} \theta_y = \sigma^{xy}_{i_1 i_2}\theta_x \otimes_{\mathcal{A}} \theta_y = \sigma(\theta_{i_1} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{i_2}).$$

Damit ist (3.13) für $k = 2$ gezeigt. Die Gleichung gelte für $k$. Wir wollen sie für $k+1$ beweisen. Es sei $w'_\circ$ das längste Wort in $\mathrm{S}_{k+1}$, nämlich $w'_\circ = s_1 s_2 \cdots s_k w_\circ$. Da $\ell(w'_\circ) = k + \ell(w_\circ)$ gilt, kann man diese Gleichung zu einer Gleichung in der Zopfalgebra anheben. Folglich ist $\sigma_{w'_\circ} = \sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma_{w_\circ}$. Wegen (2.20) und (2.25) erhalten wir $\theta_i v^n_j = \sigma^{xy}_{ij} v^n_x\, \theta_y$. Benutzt man dies mehrmals, so erhält man

$$\theta_{\vec{\jmath}} v^j_i = (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{n\,\vec{n}}_{\vec{\jmath} i}\, v^j_n\, \theta_{\vec{n}}. \tag{3.14}$$

Mit der Induktionsvoraussetzung, Gleichung (3.14) und der obigen Rekursion für $\sigma_{w'_\circ}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\eta_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{\overleftarrow{\jmath}} v^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} v^j_i &= \eta_j (\sigma_{w_\circ})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{\vec{\jmath}} v^j_i = \eta_j (\sigma_{w_\circ})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{n\vec{n}}_{\vec{\jmath} i} v^j_n \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{\vec{n}} \\
&= \eta_j v^j_n (\sigma_{w'_\circ})^{n\vec{n}}_{\vec{\imath} i} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{\vec{n}} = (\sigma_{w'_\circ})^{n\,\vec{n}}_{\vec{\imath} i} \theta_n \otimes_{\mathcal{A}} \theta_{\vec{n}} \\
&= \sigma_{w'_\circ}(\theta_{\vec{\imath}} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_i),
\end{aligned}$$

was (3.13) beweist.
(c) Es sei $\rho = \alpha_{\vec{\imath}} \theta_{\vec{\imath}} \in \Gamma^{\otimes k}_{\mathrm{Inv}}$ mit $\alpha_{\vec{\imath}} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) \in \mathbb{C}^k$. Mit Hilfe der Resultate aus (a) und (b) erhalten wir wegen $\rho \otimes 1 = \rho_{(0)} \otimes \rho_{(1)}$

$$\begin{aligned}
S(\rho) &= S(\rho_{(0)})\rho_{(1)} = S(\alpha_{\vec{\imath}} \theta_{\vec{\jmath}})\, v^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = \alpha_{\vec{\imath}} S(\theta_{\vec{\jmath}}) v^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \alpha_{\vec{\imath}} \eta_{\overleftarrow{\jmath}}\, v^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \alpha_{\vec{\imath}} \sigma_{w_\circ}(\theta_{\vec{\imath}}) = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \sigma_{w_\circ}(\rho).
\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil bewiesen. (d) Wegen $S(\ker A_k) \subseteq \ker A_k$, siehe [62, Proposition 13.10] und $\sigma_{w_\circ}(\ker A_k) \subseteq \ker A_k$ nach (3.11), sind sowohl der Antipode $S$ als auch der Automorphismus $\sigma_{w_\circ}$ auf dem Quotienten ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}$ wohldefiniert. ∎

### 3.1.2 Differentialkalküle höherer Ordnung

**Definition 3.2** (i) Eine *Differentialalgebra* über $\mathcal{A}$ ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra $\Gamma^\wedge = \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma^{\wedge n}$ mit $\Gamma^{\wedge 0} = \mathcal{A}$ zusammen mit einer linearen Abbildung $\mathrm{d}\colon \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$ vom Grad 1, so dass $\mathrm{d}^2 = 0$ gilt, und $\mathrm{d}$ die graduierte Leibnizregel

$$\mathrm{d}(\rho_1\rho_2) = \mathrm{d}\rho_1{\cdot}\rho_2 + (-1)^n\rho_1{\cdot}\mathrm{d}\rho_2, \quad \text{für } \rho_1 \in \Gamma^{\wedge n} \quad \text{und} \quad \rho_2 \in \Gamma^\wedge$$

erfüllt. Das Produkt in $\Gamma^\wedge$ wir mitunter mit $\wedge$ bezeichnet.
(ii) Gilt zusätzlich $\Gamma^{\wedge n} = \mathcal{A}{\cdot}\mathrm{d}\mathcal{A}\cdots\mathrm{d}\mathcal{A}$ ($n$ Faktoren), $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir $\Gamma^\wedge$ einen *Differentialkalkül*.
(iii) Ein Differentialkalkül $\Gamma^\wedge$ heißt *bikovariant*, falls es lineare Abbildungen $\Delta_{\mathrm{L}}\colon \Gamma^\wedge \to \mathcal{A}\otimes\Gamma^\wedge$ und $\Delta_{\mathrm{R}}\colon \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge\otimes\mathcal{A}$ vom Grad Null gibt, so dass
(a) $\Delta_{\mathrm{L}}\restriction\mathcal{A} = \Delta_{\mathrm{R}}\restriction\mathcal{A} = \Delta$,
(b) $(\Gamma^\wedge, \Delta_{\mathrm{L}}, \Delta_{\mathrm{R}})$ ist ein Hopf-Bimodul und
(c) $\Delta_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}\rho) = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{d})\Delta_{\mathrm{L}}(\rho)$ sowie $\Delta_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}\rho) = (\mathrm{d}\otimes\mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(\rho)$ für alle $\rho \in \Gamma^\wedge$.

Ein Differentialkalkül heißt *innerer Differentialkalkül*, falls es eine 1-Form $\rho \in \Gamma^{\wedge 1}$ derart gibt, dass $\mathrm{d}\zeta = \rho\zeta - (-1)^n\zeta\rho$ für alle $\zeta \in \Gamma^{\wedge n}$.
Es seien $(\Gamma_i^\wedge, \mathrm{d}_i)$, $i = 1, 2$ Differentialalgebren über $\mathcal{A}$. Dann ist $(\Gamma_1^\wedge\otimes\Gamma_2^\wedge, \mathrm{d}_\otimes)$ eine Differentialalgebra über $\mathcal{A}$, falls das Produkt in $\Gamma_1^\wedge\otimes\Gamma_2^\wedge$ durch

$$(\omega_1\otimes\omega_2)(\rho_1\otimes\rho_2) = (-1)^{ij}\,\omega_1\rho_1\otimes\omega_2\rho_2, \quad \omega_2 \in \Gamma_2^{\wedge i}, \rho_1 \in \Gamma_1^{\wedge j}, \omega_1 \in \Gamma_1^\wedge, \rho_2 \in \Gamma_2^\wedge$$

und das Differential $\mathrm{d}_\otimes$ durch

$$\mathrm{d}_\otimes(\omega_1\otimes\omega_2) = \mathrm{d}_1\omega_1\otimes\omega_2 + (-1)^i\omega_1\otimes\mathrm{d}_2\omega_2, \quad \omega_1 \in \Gamma_1^{\wedge i},\ \omega_2 \in \Gamma_2^\wedge$$

gegeben sind.

**Definition 3.3** Eine *differentielle Hopfalgebra* ist sowohl eine Differentialalgebra mit einem Differential $\mathrm{d}$ als auch eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Super-Hopfalgebra mit einem Koprodukt $\Delta$. Beide Strukturen müssen wie folgt miteinander verträglich sein: $\mathrm{d}_\otimes\Delta = \Delta\mathrm{d}$.

Die äußeren Algebren ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$, ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ und ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$ sind sämtlich differentielle Hopfalgebren, siehe [62, Theorem 14.17 und Theorem 14.18].

### 3.1.3 Der universelle linkskovariante Kalkül

In diesem Abschnitt sei $\Gamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R}$ sein assoziiertes Rechtsideal. Wir wollen hier eine dritte Möglichkeit angeben, eine äußere Algebra zu konstruieren, die $\Gamma$ als ihre homogene Komponente vom Grad Eins enthält. Die ersten beiden Konstruktionen, Woronowicz' äußere Algebra und die quadratische äußere Algebra, funktionieren für beliebige Hopf-Bimoduln – es ist kein Differential vonnöten. Die anstehende Konstruktion hingegen benötigt einen linkskovarianten Differentialkalkül $\Gamma$. Hierbei werden jedoch die rechte Kovarianz bzw. eine Zopfung nicht gebraucht.
Bevor wir zur Definition des universellen linkskovarianten Kalküls kommen, erwähnen wir die Maurer-Cartan-Formel, die als Ausgangspunkt der Definition fungiert, siehe [62, Proposition 14.13].

**Satz 3.4** *Es sei $\varGamma^\wedge = \bigoplus_{k\geq 0} \varGamma^{\wedge k}$ ein linkskovarianter Differentialkalkül über der Hopfalgebra $\mathcal{A}$, dann gilt für alle $a \in \mathcal{A}$*

$$\mathrm{d}\,\omega(a) = -\omega(a_{(1)}) \wedge \omega(a_{(2)}). \tag{3.15}$$

Was für die linkskovarianten Kalküle *erster* Ordnung die $\omega$-Abbildung ist, ist für die Kalküle höherer Ordnung die folgende $\mathcal{S}$-Abbildung. Die Abbildung $\mathcal{S}\colon \mathcal{A} \to \varGamma_{\mathrm{L}} \otimes \varGamma_{\mathrm{L}}$ sei gegeben durch

$$\mathcal{S}(a) = \omega(a_{(1)}) \otimes \omega(a_{(2)}). \tag{3.16}$$

Wegen $\omega(r) = 0$ für $r \in \mathcal{R}$ folgt aus (3.15), dass für alle $r \in \mathcal{R}$ die Gleichung $\mathcal{S}(r) = 0$ gilt. In [62, Teilabschnitt 14.3.3] wurde gezeigt, dass diese Bedingung die einzige Restriktion für die Konstruktion eines Differentialkalküls höherer Ordnung ist, der $\varGamma$ als Differentialkalkül erster Ordnung enthält.

**Definition 3.4** Es sei $\varGamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R}$ sein assoziiertes Rechtsideal. Ferner sei ${}_{\mathrm{u}}\mathcal{J}$ das von den Elementen $\mathcal{S}(r)$, $r \in \mathcal{R}$ erzeugte Ideal in der Tensoralgebra $\varGamma^{\otimes}$. Dann heißt ${}_{\mathrm{u}}\varGamma^\wedge := \varGamma^{\otimes}/{}_{\mathrm{u}}\mathcal{J} = \bigoplus_{k\geq 0} {}_{\mathrm{u}}\varGamma^{\wedge k}$ die *universelle äußere Algebra* oder auch *universeller Differentialkalkül* zum linkskovarianten Differentialkalkül erster Ordnung $\varGamma$.

**Bemerkung 3.1** (i) Diese Konstruktionsmethode des universellen Kalküls zu einem gegebenen linkskovarianten DKEO wurde bereits von Woronowicz in der Arbeit [110] für den $3D$-Kalkül auf $\mathrm{SU}_q(2)$ verwendet. Dort ist auch die de-Rham-Kohomologie des $3D$-Kalküls berechnet worden, die mit der klassischen de-Rham-Kohomologie der kompakten Lie-Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ übereinstimmt.
(ii) Ist $\varGamma$ bikovariant, so ist ${}_{\mathrm{u}}\varGamma^\wedge$ eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Super-Hopfalgebra, vgl. [62, Theorem 14.18]. □

Wir erwähnen noch einige Eigenschaften der Abbildung $\mathcal{S}$. Die Aussage (i) ist in [62, Lemma 14.15] bewiesen und (ii) folgt sofort aus (2.32).

**Lemma 3.5** (i) *Es sei $\varGamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ und $\mathcal{R}$ sein assoziiertes Rechtsideal. Dann gilt für alle $r \in \mathcal{R}$ und $a \in \mathcal{A}$*

$$\mathcal{S}(ra) = \mathcal{S}(r) \triangleleft a = S(a_{(1)})\, \mathcal{S}(r)\, a_{(2)}. \tag{3.17}$$

(ii) *Es sei $\varGamma$ ein bikovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ mit assoziiertem Rechtsideal $\mathcal{R}$ und der rechten Kowirkung $\varDelta_{\mathrm{R}}$. Dann gilt auf $\mathcal{A}$*

$$\varDelta_{\mathrm{R}}\, \mathcal{S} = (\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}. \tag{3.18}$$

Wir geben nun einige neue Formeln für das Rechnen mit $\mathcal{S}$ an, die im Anhang noch benötigt werden.

**Lemma 3.6** *Es sei $\Gamma$ ein linkskovarianter DKEO und $\mathcal{R}$ sein assoziiertes Rechtsideal.*
(i) *Für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $r \in \mathcal{R}$ gelten*

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}(ab) = \mathcal{S}(a) \triangleleft b + (\omega(a) \triangleleft b_{(1)}) \otimes \omega(b_{(2)}) + \omega(b_{(1)}) \otimes (\omega(a) \triangleleft b_{(2)}) + \varepsilon(a)\mathcal{S}(b), \\ &\mathcal{S}(rb) = \mathcal{S}(r) \triangleleft b. \end{aligned} \tag{3.19}$$

(ii) *Ist darüber hinaus $\Gamma$ ein innerer Kalkül mit $\mathrm{d}a = \theta\, a - a\, \theta$, so gilt für alle $a \in \mathcal{A}$ und $r \in \mathcal{R}$*

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}(a) = (\theta \otimes \theta) \triangleleft a - \theta \otimes (\theta \triangleleft a) - (\theta \triangleleft a) \otimes \theta + \varepsilon(a) \theta \otimes \theta, \\ &\mathcal{S}(r) = (\theta \otimes \theta) \triangleleft r. \end{aligned} \tag{3.20}$$

*Beweis*. (i) folgt sofort aus der Definition von $\mathcal{S}$ sowie (2.29). Beim Beweis von (ii) benutzt man zusätzlich (2.31). ∎

Das folgende Lemma stellt ein sehr nützliches Kriterium dar, die Dimension des Raumes ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ der linksinvarianten 2-Formen des universellen Kalküls zu bestimmen. Für die Kalküle ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$ und ${}_{\mathrm{w}}\Gamma^{\wedge}$ ist dies meist kein Problem, da $\dim {}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} = \dim {}_{\mathrm{w}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} = \mathrm{rg}(I - \sigma)$. Die Spektralzerlegung von $\sigma$ sowie die Größe der zugehörigen Eigenräume hat man aber im Allgemeinen gut im Griff.

**Lemma 3.7** *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra, $\Gamma$ ein linkskovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ mit dem Quanten-Tangentialraum $\mathcal{X}$ und ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ der universelle Differentialkalkül über $\Gamma$. Dann gilt*

$$\dim {}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} = \dim\{T \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \mid \mathrm{m}(T) \in \mathcal{X}\},$$

*wobei* $\mathrm{m}\colon \mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \to \mathcal{A}^{\circ}$ *die Multiplikationsabbildung ist.*

*Beweis*. Wir benutzen den folgenden Fakt, der aus der linearen Algebra bekannt ist: Es sei $B\colon V \times W \to \mathbb{C}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform und $U$ ein Teilraum von $V$. Dann ist auch die induzierte Paarung

$$\overline{B}\colon V/U \times U^{\perp} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad U^{\perp} = \{w \in W \mid B(u, w) = 0,\, u \in U\}$$

nicht ausgeartet. Nach Lemma 2.16 ist die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Bilinearform auf $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}} \times \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$ nicht ausgeartet. Wendet man die obige Tatsache auf den Teilraum $U = \mathcal{S}(\mathcal{R})$ an, so erhält man, dass die Paarung ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} \times U^{\perp} \to \mathbb{C}$ nicht ausgeartet ist. Insbesondere gilt $\dim {}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} = \dim U^{\perp}$. Es sei $T = \alpha^{ij} X_i \otimes X_j \in U^{\perp}$. Unter Beachtung von Lemma 2.16 erhält man für alle $r \in \mathcal{R}$:

$$0 = \langle \mathcal{S}(r), T \rangle = \langle \omega(r_{(1)}) \otimes \omega(r_{(2)}),\, \alpha^{ij} X_i \otimes X_j \rangle = \alpha^{ij} X_i(r_{(1)}) X_j(r_{(2)}) = \mathrm{m}(T)(r).$$

Trivialerweise ist $\mathrm{m}(T)(1) = 0$ und somit $\mathrm{m}(T) \in \mathcal{X}$. Folglich ist $U^{\perp} = \mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$, das Urbild von $\mathcal{X}$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

**Bemerkung 3.2** (i) Es sei $\Gamma$ ein *bikovarianter* DKEO. Insbesondere ist $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul mit einer Zopfung $\sigma$. Da für lineare Abbildungen $f$ immer $(\ker f)^{\perp} = \mathrm{im}\, f^{\mathrm{t}}$ gilt, lässt sich die Bilinearform $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}} \times \mathcal{X} \otimes \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ auch zu einer nicht ausgearteten Bilinearform ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2} \times$

$\mathcal{X}\wedge\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ faktorisieren, wobei $\mathcal{X}\wedge\mathcal{X} = A_2^{\mathfrak{t}}(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X})$ ist. Außerdem ist $A_2^{\mathfrak{t}}$ die zu $A_2\restriction(\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}})$ duale lineare Abbildung.
(ii) Es sei $\Gamma$ ein bikovarianter DKEO. Wegen $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subseteq \ker A_2$ gilt $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X}) \supseteq \mathrm{im}\, A_2^{\mathfrak{t}}$. Im Allgemeinen gilt jedoch nicht $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X}) = \mathrm{im}\, A_2^{\mathfrak{t}}$ wie etwa im Falle der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen. □

Die Frage nach der Größe des Raumes der linksinvarianten 2-Formen des universellen Kalküls ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ wollen wir für die Quantengruppen $G_q$ und ihre Standardkalküle $\Gamma_{\tau,z}$ beantworten. Dabei arbeiten wir mit der oben angegebenen dualen Paarung und bestimmen den Raum $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$.

**Lemma 3.8** *Es seien $V$ ein rechter $\mathcal{A}$-Komodul, $W$ ein rechter $\mathcal{A}^\circ$-Modul und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times W \to \mathbb{C}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Ferner gelte für alle $v \in V$, $w \in W$ und $f \in \mathcal{A}^\circ$:*

$$\langle v, w \cdot f\rangle = \langle v_{(0)} f(v_{(1)}), w\rangle.$$

*Dann gilt: Ist $P \in \mathrm{Mor}(V)$ ein Morphismus von $\mathcal{A}$-Komoduln, so ist $P^{\mathfrak{t}} \in \mathrm{Mor}(W)$ ein Morphismus von $\mathcal{A}^\circ$-Moduln. Ist $P$ darüber hinaus idempotent, dann ist die Einschränkung der Bilinearform auf $\mathrm{im}\, P \times \mathrm{im}\, P^{\mathfrak{t}}$ ebenfalls nicht ausgeartet.*

*Beweis*. Wegen $P \in \mathrm{Mor}(V)$ gilt $Pv_{(0)} \otimes v_{(1)} = (Pv)_{(0)} \otimes (Pv)_{(1)}$ für $v \in V$. Somit gilt für alle $v \in V$, $w \in W$ und $f \in \mathcal{A}^\circ$:

$$\begin{aligned}
\langle v, P^{\mathfrak{t}} w \cdot f\rangle &= \langle v_{(0)} f(v_{(1)}), P^{\mathfrak{t}} w\rangle \\
&= \langle P v_{(0)} f(v_{(1)}), w\rangle \\
&= \langle (Pv)_{(0)} f((Pv)_{(1)}), w\rangle \\
&= \langle Pv, w \cdot f\rangle \\
&= \langle v, P^{\mathfrak{t}}(w \cdot f)\rangle.
\end{aligned}$$

Da die Paarung nicht ausgeartet ist, folgt die erste Behauptung.
Sei $P$ nun zusätzlich idempotent. Es sei $v_0 \in \mathrm{im}\, P$, also $v_0 = Pv_0$. Angenommen, es ist $0 = \langle v_0, P^{\mathfrak{t}} w\rangle$ für alle $w \in W$. Dann gilt

$$0 = \langle Pv_0, P^{\mathfrak{t}} w\rangle = \langle P^2 v_0, w\rangle = \langle v_0, w\rangle.$$

Da die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet ist, folgt $v_0 = 0$. Ähnlich zeigt man, dass auch der Bildraum von $P$ die Punkte des Bildraumes von $P^{\mathfrak{t}}$ trennt. ■

Es sei $\mathcal{B}$ ein rechter $\mathcal{A}^\circ$-Modul bezüglich der rechtsadjungierten Wirkung $\triangleleft$. Wir setzen $\mathcal{B}_0 := \{b \in \mathcal{B} \mid b \triangleleft f = \varepsilon(f)b,\ f \in \mathcal{A}^\circ\}$ und nennen diese Elemente $\triangleleft$-invariant.

**Folgerung 3.9** *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra und $\Gamma$ ein bikovarianter DKEO über $\mathcal{A}$ mit dem Quanten-Tangentialraum $\mathcal{X}$. Ferner sei $P \in \mathrm{Mor}(\Delta_{\mathrm{R}})$ idempotent. Dabei bezeichne $\Delta_{\mathrm{R}}$ die rechte Kowirkung von $\mathcal{A}$ auf einem der Räume $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}$, ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ bzw. ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$.*
*Dann ist $\mathrm{im}\, P$ ein $\Delta_{\mathrm{R}}$-invarianter Teilraum von $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}$, ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ bzw. von ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$ und $\mathrm{im}\, P^{\mathfrak{t}}$ ist ein $\triangleleft$-invarianter Teilraum von $\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}$, $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$ bzw. von $\mathcal{X}\wedge\mathcal{X}$. Die Einschränkung der Bilinearform auf $\mathrm{im}\, P\times \mathrm{im}\, P^{\mathfrak{t}}$ ist nicht ausgeartet.*

*Beweis*. Nach (3.18) ist $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ ein $\Delta_{\mathrm{R}}$-invarianter Teilraum von $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}$, und $(\ker A_2)_{\mathrm{L}}$ ist $\Delta_{\mathrm{R}}$-invariant, da $\sigma$ eine Bikomodul-Abbildung ist. Beachtet man (2.33), so erhält man für alle $\rho \in \Gamma_{\mathrm{L}}$, $f \in \mathcal{A}^\circ$ und $X \in \mathcal{X}$

$$\langle \rho_{(0)} f(\rho_{(1)}), X\rangle = \langle \rho, X \triangleleft f\rangle.$$

Diese Identität lässt sich fortsetzen auf $\rho \in \Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}$ und $X \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$. Hieraus folgt die $\triangleleft$-Invarianz von $\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}$ und $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$. Somit ist das obige Lemma in unserer Situation anwendbar. ■

Unser nächstes Ziel ist es, den universellen Differentialkalkül mit der quadratischen äußeren Algebra zu vergleichen. Letztere ist offensichtlich ein Quotient von ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$ aufgrund der Universalitätseigenschaft. Wir lassen mitunter das Zeichen $\wedge$ weg und schreiben $\rho_1\,\rho_2$ anstelle von $\rho_1 \wedge \rho_2$, wenn wir in einem Differentialkalkül $\Gamma^\wedge$ arbeiten. Es stellt sich heraus, dass die biinvariante 2-Form $\theta^2$ eine entscheidende Rolle bei der Frage spielt, ob die oben genannten Algebren übereinstimmen oder nicht. Im folgenden Lemma tragen wir einige Eigenschaften von $\theta^2$ zusammen.

**Lemma 3.10** *Es sei $\Gamma$ ein bikovarianter innerer DKEO über $\mathcal{A}$ mit $\mathrm{d}a = \theta\, a - a\,\theta$, $a \in \mathcal{A}$, und $\Gamma^\wedge$ sei ein bikovarianter Differentialkalkül über $\mathcal{A}$, der $\Gamma$ als Komponente ersten Grades enthält.*
(i) *Für $a \in \mathcal{A}$ gilt dann:*

$$\theta^2 \triangleleft a = \varepsilon(a)\theta^2 + \theta\omega(a) + \omega(a)\theta - \mathrm{d}\omega(a), \tag{3.21}$$
$$(\mathrm{d}\theta) \triangleleft a = \varepsilon(a)\mathrm{d}\theta + \theta\omega(a) + \omega(a)\theta - \mathrm{d}\omega(a). \tag{3.22}$$

(ii) *Falls $\mathrm{d}\theta = 2\theta^2$, dann ist $\theta^2$ zentral in $\Gamma^\wedge$.*
(iii) *Gilt $a\,\theta^2 = \theta^2\, a$ für alle $a \in \mathcal{A}$, dann ist $\Gamma^\wedge$ ein innerer Differentialkalkül mit*

$$\mathrm{d}\rho = \theta\,\rho - (-1)^n \rho\,\theta, \quad \textit{für} \quad \rho \in \Gamma^n \tag{3.23}$$

*und $\theta^2$ ist zentral in $\Gamma^\wedge$.*

*Beweis*. (i) Wegen (2.31) und (3.15) gilt

$$\begin{aligned}\theta^2 \triangleleft a &= \theta \triangleleft a_{(1)}(\theta \triangleleft a_{(2)})\\ &= (\varepsilon(a_{(1)})\theta + \omega(a_{(1)}))(\varepsilon(a_{(2)})\theta + \omega(a_{(2)}))\\ &= \varepsilon(a)\theta^2 + \theta\omega(a) + \omega(a)\theta - \mathrm{d}\omega(a).\end{aligned}$$

Benutzt man $\mathrm{d}\theta\, b = \mathrm{d}(\theta b) + \theta\,\mathrm{d}b$, $\theta\, b = b\,\theta + \mathrm{d}b$, (2.31) und (3.15), so erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta \triangleleft a &= S(a_{(1)})\mathrm{d}\theta\, a_{(2)}\\ &= S(a_{(1)})(\mathrm{d}(\theta\, a_{(2)}) + \theta\,\mathrm{d}a_{(2)})\\ &= S(a_{(1)})\,\mathrm{d}(a_{(2)}\,\theta + \mathrm{d}a_{(2)}) + S(a_{(1)})\,\theta\, a_{(2)} S(a_{(3)})\mathrm{d}a_{(4)}\\ &= S(a_{(1)})(\mathrm{d}a_{(2)}\,\theta + a_{(2)}\mathrm{d}\,\theta) + (\varepsilon(a_{(1)})\theta + \omega(a_{(1)}))\omega(a_{(2)})\\ &= \omega(a)\,\theta + \varepsilon(a)\,\mathrm{d}\theta + \theta\,\omega(a) - \mathrm{d}\,\omega(a).\end{aligned}$$

(ii) Multipliziert man Gleichung (3.21) mit $2$ und subtrahiert Gleichung (3.22), so erhält man $0 = \theta\omega(a) + \omega(a)\theta - \mathrm{d}\omega(a)$ bzw. $\mathrm{d}\omega(a) = \theta\,\omega(a) + \omega(a)\,\theta$. Setzt man dies in (3.21) ein, so hat man

$$\theta^2 \triangleleft a = \varepsilon(a)\theta^2, \qquad \text{was äquivalent zu} \qquad \theta^2 a = a\theta^2 \qquad \text{ist.} \tag{3.24}$$

Wir zeigen, dass $\theta^2$ mit allen Elementen aus $\Gamma$ vertauscht. Es seien $\rho \in \Gamma$ und $a_i, b_i \in \mathcal{A}$ so gewählt, dass $\rho = a_i\,\mathrm{d}b_i$. Dann gilt wegen (3.24), und da $\Gamma$ ein innerer DKEO ist,

$$\theta^2\,\rho = \theta^2\,a_i(\theta\,b_i - b_i\,\theta) = a_i(\theta\,b_i - b_i\,\theta)\,\theta^2 = \rho\,\theta^2.$$

Da $\Gamma^\wedge$ von den Elementen aus $\mathcal{A}$ und $\Gamma$ als Algebra erzeugt wird, ist $\theta^2$ in $\Gamma^\wedge$ zentral.

(iii) Den Beweis von $\mathrm{d}\rho = \theta\,\rho - (-1)^n\rho\,\theta$ führen wir durch vollständige Induktion über den Grad $n$ der Form $\rho \in \Gamma^{\wedge n}$. Für $n = 0$ ist die Bedingung erfüllt aufgrund der Definition des Differentialkalküls erster Ordnung. Angenommen, die Formel gilt für $n-1$. Zu $\rho$ existieren $\alpha_i \in \Gamma^{\wedge n-1}$ und $b_i \in \mathcal{A}$, so dass $\rho = \alpha_i\,\mathrm{d}b_i$. Nach Induktionsvoraussetzung und wegen $\theta^2\,b_i = b_i\,\theta^2$ für alle $b_i$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\alpha_i\,\mathrm{d}b_i &= \theta\,\alpha_i\,\mathrm{d}b_i - (-1)^{n-1}\alpha_i\,\theta\,(\theta b_i - b_i\theta) \\
&= \theta\,\rho - (-1)^n(\alpha_i\,\theta b_i\,\theta - \alpha_i b_i\,\theta\,\theta) \\
&= \theta\,\rho - (-1)^n\alpha_i\,\mathrm{d}b_i\,\theta \\
&= \theta\,\rho - (-1)^n\rho\,\theta.
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis erbracht. Wendet man auf die obige Gleichung noch einmal $\mathrm{d}$ und (3.23) an und beachtet $\mathrm{d}^2\rho = 0$, so ergibt sich $\theta^2\,\rho = \rho\,\theta^2$, und damit ist $\theta^2$ zentral in $\Gamma^{\wedge 2}$.

■

## 3.2 Größenvergleich der äußeren Algebren

In diesem Abschnitt präsentieren wir das erste Hauptresultat der Arbeit. Für die bikovarianten Standarddifferentialkalküle bestimmen wir die Größen der linksinvarianten und biinvarianten äußeren Algebren im Falle von Woronowicz' Konstruktion und für die Quantengruppen der A-Serie. Für alle vier Serien vergleichen wir die quadratische äußere Algebra mit der universellen äußeren Algebra.

Als *Poincaré-Reihe* der graduierten Algebra $\mathcal{B} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$ (mitunter auch Hilbert-Reihe genannt) bezeichnen wir die Potenzreihe

$$P(\mathcal{B}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim(\mathcal{B}_k) t^k.$$

### 3.2.1 Resultate für die Quantengruppen der A-Serie

**Theorem 3.11** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$, $q$ sei transzendent und $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ mit $\tau \in \{+,-\}$, wobei $z$ ein $\Gamma$-zulässiger Parameter sei. Mit ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}$ bezeichnen wir die Unteralgebra der linksinvarianten Elemente von Woronowicz' äußerer Algebra ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}$.*
*Dann lautet die Poincaré-Reihe von ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}$*

$$P({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) = (1+t)^{N^2},$$

*das heißt, $\dim({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{L}}) = \binom{N^2}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gibt es, bis auf skalare Vielfache, genau eine linksinvariante Form vom maximalen Grad $N^2$.*

**Bemerkung 3.3** (i) Ein Vergleich mit der klassischen Situation ist hier am Platze. Die angegebene Poincaré-Reihe stimmt mit der Poincaré-Reihe der Algebra der linksinvarianten Formen auf $\mathrm{U}(N)$ bzw. $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$ überein, da der klassische Differentialkalkül die Dimension $N^2$ hat. Für die klassischen Lie-Gruppen $\mathrm{SU}(N)$ und $\mathrm{SL}(N,\mathbb{R})$ entfällt in der Poincaré-Reihe ein Faktor $1+t$.
(ii) Offenbar sind die Definitionen der Algebren ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}$ nur von der Zopfung $\sigma$ abhängig. Die Matrix von $\sigma$ hängt beim Kalkül $\Gamma_{\tau,z}$ auf $\mathrm{GL}_q(N)$ bzw. $\mathrm{SL}_q(N)$ nicht von $z$ ab und auch nicht von der Wahl der Quantengruppe $\mathrm{GL}_q(N)$ oder $\mathrm{SL}_q(N)$, wohl aber von $N$.
(iii) Für $\mathrm{SL}_q(2)$ und deren $4$-dimensionale bikovariante Differentialkalküle erster Ordnung wurde die Poincaré-Reihe der Algebra ${}_{\mathrm{S}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}$ von Grießl [36] bestimmt. □

**Theorem 3.12** *Es seien $\mathcal{A}$, $q$ und $\Gamma$ wie im Theorem 3.11. Mit ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{Inv}}$ bezeichnen wir die Unteralgebra der biinvarianten Elemente von ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}$. Dann gilt*

(i)

$$P({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{Inv}}, t) = (1+t)(1+t^3)\cdots(1+t^{2N-1}).$$

(ii) *Für $\omega_k \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ und $\omega_n \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge n}_{\mathrm{Inv}}$ gilt*

$$\omega_k \wedge \omega_n = (-1)^{kn}\, \omega_n \wedge \omega_k.$$

(iii) *Für $\omega \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{Inv}}$ gilt $\mathrm{d}\omega = 0$.*
(iv) *Verschiedene biinvariante Formen repräsentieren verschiedene de-Rham-Kohomologieklassen.*

**Bemerkung 3.4** Nach (i) ist die Dimension von ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ gleich der Anzahl der Partitionen von $k$ in die Summe von paarweise verschiedenen ungeraden natürlichen Zahlen, kleiner gleich $2N-1$. Diese Zahl ist auch gleich der Anzahl der symmetrischen Partitionen $\lambda$ von $k$, also mit $\lambda = \lambda'$ wobei $\lambda_1 \le N$. Die linksinvariante Form vom maximalen Grad $N^2$ ist sogar biinvariant. □

Wir setzen in Anlehnung an die Notation in [92]

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= q^{N+1}\mathfrak{s} = q^{-2} + q^{-4} + \cdots + q^{-2N}, \\ \mathfrak{s}'_+ &= \mathfrak{x} - q^{-2} + 1, \quad \mathfrak{s}'_- = \mathfrak{x} - q^{-2N} + q^{-2N-2}, \\ \mathfrak{n}_{\tau,z} &= z^{-\tau}\mathfrak{s}'_\tau - \mathfrak{x} \end{aligned} \tag{3.25}$$

und nennen den Parameterwert $z$ des Kalküls $\Gamma_{\tau,z}$ *generisch*, falls $\mathfrak{n}_{\tau,z} \neq 0$.

**Theorem 3.13** *Es seien $\mathcal{A}$, $q$ und $\Gamma$ wie im Theorem 3.11. Mit ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$ und ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ bezeichnen wir die universelle bzw. die quadratische äußere Algebra über $\Gamma$.*
*Dann sind die folgenden differentiellen Hopfalgebren zueinander isomorph:*

(i) ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge \cong {}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$.
(ii) ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge \cong {}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ *für $N \geq 3$, $\mathfrak{n}_{\tau,z} \neq 0$, sowie für $N = 2$, $\tau = +$ mit $z \notin \{q, -q, (q^4+1)/(q^2+1)\}$.*
(iii) ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge \cong {}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge/(\theta^2)$ *für $N = 2$, $\tau = +$ und $z^2 = q^2$.*

*Im Fall* (iii) *ist $\theta^2$ zentral, und der universelle Differentialkalkül ist ein innerer Kalkül.*

**Bemerkung 3.5** (i) Für die Quanten-Super-Gruppe $\mathrm{GL}_q(m|n)$ und den Kalkül $\Gamma_{\tau,1}$ wurde die Isomorphie ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge \cong {}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ in der Arbeit [66, Abschnitt 5.3] gezeigt.
(ii) Da im Falle $N = 2$ die Kalküle $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$ isomorph sind, genügt es $\Gamma_{+,z}$ zu betrachten. Im Falle $\mathrm{SL}_q(2)$ entsprechen die Parameterwerte $z = q$ und $z = -q$ dem $4D_+$-Kalkül bzw. dem $4D_-$-Kalkül, die in [111] definiert wurden.
(iii) Die Kalküle ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ und ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$ sind ebenfalls innere Kalküle, da $\theta^2 = 0$, vergleiche auch Lemma 3.10 (iii). □

### 3.2.2 Resultate für die Quantengruppen der B-, C- und D-Serien

Wir formulieren nun das Theorem 3.13 entsprechende Resultat für die Quantengruppen der orthogonalen und symplektischen Serien. In diesem Fall betrachten wir die Kalküle $\Gamma_+ := \Gamma_{+,1}$ und $\Gamma_- := \Gamma_{+,-1}$. Wegen der Isomorphie der Kalküle $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$, gilt insbesondere $X_0^+ = X_0^-$.

**Theorem 3.14** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ oder $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ mit $N \geq 3$ und $q$ sei keine Einheitswurzel. Es sei $\Gamma$ einer der beiden bikovarianten DKEO $\Gamma_\pm$ über $\mathcal{A}$ und $2\mathfrak{s} + (q - q^{-1})(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^{-1}) \neq 0$ im Falle von $\Gamma_-$. Wir bezeichnen die bis auf skalare Vielfachheit eindeutig bestimmte biinvariante $1$-Form mit $\theta$.*
(i) *Dann sind der Quotient ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge/(\theta^2)$ und die quadratische äußere Algebra ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^\wedge$ einander isomorphe Hopf-Bimoduln.*
(ii) *Die biinvariante $2$-Form $\theta^2$ ist zentral in ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$. Der Kalkül ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$ ist ein innerer Differentialkalkül, d. h.*

$$\mathrm{d}\rho = \theta \wedge \rho - (-1)^n \rho \wedge \theta, \quad \rho \in {}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge n}. \tag{3.26}$$

**Bemerkung 3.6** (i) Die Isomorphie von Hopf-Bimoduln ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}/(\theta^2)$ und ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$ impliziert auch die Isomorphie der Räume als differentielle graduierte Hopfalgebren.
(ii) Leider war es nicht möglich, die Poincaré-Reihen für die linksinvarianten bzw. biinvarianten äußeren Algebren der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen zu bestimmen. Nur im Falle der Quantengruppe $\mathrm{Sp}_q(4)$ ist es möglich, die Größe der linksinvarianten äußeren Algebra exakt zu berechnen, da eine endliche Gröbnerbasis aus homogenen Elementen vom Grad $2$ existiert. Es gilt

$$P({}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) = \frac{(1+t)^{11}}{1-5t+5t^2-t^3}.$$

Unter Verwendung des Computeralgebra-Programms FELIX [5] konnten die Anfangsglieder einiger weiterer Poincaré-Reihen bestimmt werden. Für $\mathrm{O}_q(3)$ hat man

$$P({}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) = 1 + 9t + 46t^2 + 183t^3 + 628t^4 + 1938t^5 + 5514t^6 + 14709t^7 + 37212t^8 + \cdots .$$

Für alle orthogonalen und symplektischen Quantengruppen mit $N \geq 5$ und deren Standardkalküle gilt:

$$P({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{Inv}}, t) = 1 + t + 5t^3 + 15t^4 + \cdots .$$

In diesem Falle gibt es biinvariante Formen, die nicht geschlossen sind. Die biinvariante äußere Algebra ist nicht graduiert kommutativ. □

## 3.3 Iwahori-Hecke-Algebren

In diesem Abschnitt behandeln wir die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A, kurz Hecke-Algebra genannt, und wir zählen einige ihrer wichtigsten Eigenschaften auf. Die Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ A ist eine gut untersuchte Algebra, zu der es eine Reihe von Monographien [33, 51] und eine Vielzahl von Artikeln [37, 38, 64, 83, 105] gibt.
Wir werden eine explizite Formel für die zentralen Idempotente der Hecke-Algebra angeben. Durchweg setzen wir voraus, dass die komplexe Zahl $q$ keine Einheitswurzel ist. In diesem Falle gelten dieselben Aussagen, wie im Falle des Grundkörpers $\mathbb{C}(q)$. Wir übernehmen die Definition aus der Monographie von Humphreys [50, Abschnitte 7.1 und 7.4].

**Definition 3.5** Es gibt eine eindeutig bestimmte assoziative Algebrenstruktur auf dem Vektorraum mit der Basis $\{T_w \mid w \in \mathrm{S}_k\}$, wobei $T_1 = 1$ ist, so dass für alle $s \in \{s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ und $w \in \mathrm{S}_k$ gilt

$$T_s T_w = T_{sw}, \qquad \text{falls} \quad \ell(sw) > \ell(w), \tag{3.27}$$

$$T_s T_w = (q - q^{-1}) T_w + T_{sw}, \quad \text{falls} \quad \ell(sw) < \ell(w). \tag{3.28}$$

Diese Algebra heißt *Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ* $\mathrm{A}_{k-1}$ und wird bezeichnet mit $H_k(q)$.

Anstelle von (3.28) wird oftmals $T_sT_w = (q-1)T_w + qT_{sw}$ genommen. Die von uns oben angegebene Variante ist aber beim Arbeiten mit Quantengruppen von Vorteil. Wir schreiben kurz $T_i$ anstelle von $T_{s_i}$. Die Relationen (3.4), (3.5) mit $T_i$ anstelle von $b_i$ und

$$T_i^2 = (q-q^{-1})T_i + 1, \quad i = 1, \dots, k-1, \tag{3.29}$$

sind äquivalent zu (3.27) und (3.28).

### 3.3.1 Partitionen, zentrale Idempotente und Involutionen

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus [67] für Partitionen, Kompositionen und Charaktere. Ein Tupel $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ von ganzen Zahlen heißt *Partition* von $k$, falls $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = k$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ gilt. Wir schreiben dann $\lambda \vdash k$. Mitunter verwenden wir die Bezeichnung $\lambda = (k^{m_k}(k-1)^{m_{k-1}} \cdots 1^{m_1})$, wobei $m_i$ die Anzahl der Komponenten von $\lambda$ bezeichnet, die gleich $i$ sind. Wir identifizieren eine Partition $\lambda$ häufig mit dem zugehörigen Young-Diagramm (auch Ferrers-Diagramm genannt). Es hat in der $i$-ten Zeile $\lambda_i$ Kästchen, wobei die ersten Kästchen jeder Zeile untereinander stehen und alle weiteren Kästchen rechts vom ersten stehen. Als *konjugierte* Partition von $\lambda$ bezeichnen wir diejenige Partition $\lambda'$, deren Young-Diagramm das transponierte des Young-Diagramms von $\lambda$ ist (Vertauschung von Zeilen und Spalten), also $\lambda'_n = \mathrm{Card}\{i \mid \lambda_i \geq n\}$. Die irreduziblen Darstellungen der Hecke-Algebra $H_k(q)$ sind durch Partitionen $\lambda$ von $k$ parametrisiert. Die Dimension einer zu $\lambda$ gehörigen irreduziblen Darstellung ist, wie im Fall der symmetrischen Gruppe $\mathrm{S}_k$, gleich $d_\lambda = k!/h(\lambda)$. Dabei ist $h(\lambda) = \prod_{x\in\lambda} h(x)$ das Produkt der *Hakenlängen* $h(x) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, wobei $x = (i,j)$ ein Kästchen von $\lambda$ ist, das sich in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte befindet, vergleiche etwa [67, I. 6, Example 2 (a) und I. 7 (7.6)]. In diesem Fall definieren wir den *Inhalt* (engl. content) von $x$ durch $c(x) := j - i$. Ferner sei $c(\lambda) = \sum_{x\in\lambda} c(x)$ der *Inhalt* von $\lambda$. Den zu $\lambda$ gehörigen irreduziblen Charakter bezeichnen wir mit $\chi^\lambda$. Unter einer *Zerlegung der Eins* verstehen wir eine Menge von primitiven (minimalen) Idempotenten $\{p_\lambda^i \mid \lambda \vdash k,\ 1 \leq i \leq d_\lambda\}$, so dass $p_\lambda^i p_\mu^j = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ij}$. Das Element $z_\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} p_\lambda^i$ ist dann das minimale *zentrale* Idempotent, assoziiert zu $\lambda$. Es gilt $\sum_\lambda z_\lambda = 1$. Für den Rest dieses Abschnitts fixieren wir die natürlichen Zahlen $k$ und $N$.

Eine $N$-*Komposition* von $k$ ist ein $N$-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_i \geq 0$ mit $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_N = k$. Wir bezeichnen dies mit $\mu \models k$. Für jede $N$-Komposition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ von $k$ definieren wir $\boldsymbol{x}^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_N^{\mu_N}$, wobei $x_1, \dots, x_N$ kommutierende Variablen sind. Es sei $\{e_1, \dots, e_N\}$ eine Basis des Vektorraumes $V = \mathbb{C}^N$. Für einen Tensor $v = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \in V^{\otimes k}$ definieren wir sein *Gewicht* $\mathrm{wt}(v)$ als diejenige Komposition $\mathrm{wt}(v) = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, wobei $\mu_j$ die Anzahl der Faktoren $e_j$ in $v$ ist. Offenbar gilt $\mathrm{wt}(v) \models k$. Für eine Komposition $\mu$ von $k$ definieren wir den idempotenten Operator $E_\mu$ auf $V^{\otimes k}$ vermöge $E_\mu(v) := \delta_{\mu,\mathrm{wt}(v)}\, v$, wobei $v = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ ein Monom in $V^{\otimes k}$ ist. Man prüft leicht nach, dass $E_\mu E_\nu = \delta_{\mu,\nu} E_\mu$ für alle $\mu, \nu \models k$ gilt, sowie $I = \sum_{\mu \models k} E_\mu$.

Als nächstes geben wir eine andere Form der Darstellung der Hecke-Algebra $H_k(q)$ durch die $\hat{R}$-Matrizen (2.3) vom Typ A an. Wir definieren die Darstellungen $\varrho$ und $\varrho_\mathsf{c}$ von $H_k(q)$ auf $V^{\otimes k}$. Es bezeichne $\tau_n$ den Vertauschungsoperator von $V^{\otimes k}$, der die $n$-te und $(n+1)$-te Tensorkomponenten miteinander vertauscht. Die Wirkung des Hecke-Generators $T_n$, $1 \leq n \leq k-1$, auf einem Basiselement $v = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ ist wie folgt gegeben:

$$\varrho(T_n)v = \begin{cases} qv, & \text{falls} \quad i_n = i_{n+1}, \\ \hat{q}v + \tau_n(v), & \text{falls} \quad i_n < i_{n+1}, \\ \tau_n(v), & \text{falls} \quad i_n > i_{n+1}. \end{cases}$$

Die Darstellung $\varrho_{\mathsf{c}}$ ist gegeben durch $\varrho_{\mathsf{c}}(T_n) = \tau_n \varrho(T_n) \tau_n$. In Matrixschreibweise bedeutet das $\varrho(T_n) = \hat{R}_{n,n+1}$, wobei die Indizes $n$ und $n+1$ bei $\hat{R}$ die Stellen des Tensorproduktes $V^{\otimes k}$ angeben, an denen $\hat{R}$ wirkt. Analog ist $\varrho_{\mathsf{c}}(T_n) = \check{R}_{n,n+1}$. Beide Darstellungen $\varrho$ und $\varrho_{\mathsf{c}}$ vertauschen mit allen Idempotenten $E_\mu$, $\mu \models k$, da sie jeweils das Gewicht eines Tensors $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ nicht verändern.
Wir führen auf $H_k(q)$ ein Spurfunktional $\mathrm{Tr}$ mit Werten in der Polynomalgebra $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ ein. Der folgende Satz stammt aus einer Arbeit von Ram, siehe [83, Lemma 3.5, Lemma 3.7 und Theorem 3.8].

**Satz 3.15** (i) *Die Abbildung* $\mathrm{Tr}\colon H_k(q) \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$

$$\mathrm{Tr}(h) = \sum_{\mu \models k} \boldsymbol{x}^\mu \ \mathrm{tr}(E_\mu \, \varrho(h)) \tag{3.30}$$

*definiert auf* $H_k(q)$ *ein Spurfunktional, d. h., es gilt* $\mathrm{Tr}(hg) = \mathrm{Tr}(gh)$ *für alle* $h, g \in H_k(q)$.
(ii) *Es sei* $p \in H_k(q)$ *ein Idempotent. Dann hängt* $\mathrm{Tr}(p)$ *nicht von* $q$ *ab. Insbesondere gilt für alle Partitionen* $\lambda$ *von* $k$ *und alle minimalen Idempotente* $p_\lambda$ *mit* $p_\lambda z_\lambda = p_\lambda$*, dass*

$$\mathrm{Tr}(p_\lambda) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_N), \tag{3.31}$$

*dabei ist* $s_\lambda$ *die Schur-Funktion zur Partition* $\lambda$*, siehe* [67, I (3.1), S. 40].
(iii) *Für* $h \in H_k(q)$ *gilt*

$$\mathrm{Tr}(hz_\lambda) = \chi^\lambda(h) s_\lambda(x_1, \ldots, x_N) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Tr}(h) = \sum_{\lambda \vdash k} \chi^\lambda(h) s_\lambda(x_1, \ldots, x_N). \tag{3.32}$$

**Bemerkung 3.7** Der Beweis von [83, Lemma 3.5] zeigt, dass das Ersetzen von $\varrho$ durch $\varrho_{\mathsf{c}}$ in Formel (3.30) die Funktion $\mathrm{Tr}$ nicht verändert. □

Eine Bilinearform $B$ auf einer Algebra $\mathcal{B}$ heißt *assoziativ*, falls für alle $a, b, c \in \mathcal{B}$ die Identität $B(ab, c) = B(a, bc)$ erfüllt ist. In der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{S}_k$ gilt für alle Partitionen $\lambda$ von $k$, dass

$$z_\lambda = \frac{d_\lambda}{k!} \sum_{w \in \mathrm{S}_k} \chi^\lambda(w) \, w^{-1},$$

siehe [83, Formel (1.2)]. Wir werden zeigen, dass in der Hecke-Algebra $H_k(q)$ eine analoge Formel für die minimalen zentralen Idempotente $z_\lambda$ gilt. Dies wird gesichert durch die Existenz einer assoziativen, symmetrischen und nicht ausgearteten Bilinearform auf $H_k(q)$.
Es seien $\{T_w \mid w \in \mathrm{S}_k\}$ und $\{f^w \mid w \in \mathrm{S}_k\}$ ein Paar dualer Basen von $H_k(q)$ bzw. seinem Dualraum. Möge $f^0$ das dem Einselement aus $H_k(q)$ entsprechende Funktional bezeichnen.

**Lemma 3.16** *Für* $g, h \in H_k(q)$ *definiert* $\langle g, h\rangle := f^0(gh)$ *eine symmetrische, assoziative und nicht ausgeartete Bilinearform auf* $H_k(q)$. *Für alle* $v,\ w \in \mathrm{S}_k$ *gilt*

$$\langle T_v, T_w\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad vw = 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{$*$}$$

*Beweis.* Für die rechte Seite von $(*)$ benutzen wir das Kronecker-Symbol $\delta_{vw,1}$. Die Assoziativität der Bilinearform folgt sofort aus ihrer Definition. Nehmen wir Formel $(*)$ als bereits bewiesen an. Dann ist die Bilinearform auch symmetrisch, da $vw = 1$ genau dann, wenn $wv = 1$, und $f^0$ ist linear. Die Form ist nicht ausgeartet, da $\{T_w \mid w \in \mathrm{S}_k\}$ und $\{T_{w^{-1}} \mid w \in \mathrm{S}_k\}$ ein Paar orthogonaler Basen bilden. Wir zeigen nun $(*)$ durch vollständige Induktion über die Länge von $w$. Nach Definition ist $\langle T_v, 1\rangle = f^0(T_v) = \delta_{v,1}$, und somit gilt $(*)$ für $w = 1$. Angenommen, $(*)$ gilt für alle $v, w' \in \mathrm{S}_k$, wobei $w'$ eine fixierte Länge hat. Wir zeigen die Behauptung für $w = sw'$ mit $\ell(w) = \ell(w') + 1$ und $v$ beliebig.
*Fall 1:* $\ell(vs) = \ell(v) + 1$. Wegen (3.27) und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\langle T_v, T_w\rangle = f^0(T_v T_s T_{w'}) = f^0(T_{vs} T_{w'}) = \langle T_{vs}, T_{w'}\rangle = \delta_{vsw',1} = \delta_{vw,1}.$$

*Fall 2:* $\ell(vs) = \ell(v) - 1$. Wegen (3.28) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\langle T_v, T_w\rangle = f^0(T_v T_s T_{w'}) = f^0\big((\hat{q}T_v + T_{vs})T_{w'}\big) = \hat{q}\langle T_v, T_{w'}\rangle + \langle T_{vs}, T_{w'}\rangle = \hat{q}\langle T_v, T_{w'}\rangle + \delta_{vw,1}.$$

Wir müssen zeigen, dass $\langle T_v, T_{w'}\rangle = 0$ gilt bzw., was laut Induktionsvoraussetzung äquivalent dazu ist, $vw' \neq 1$. Angenommen, es gelte $vw' = 1$. Dann ist $\ell(v) = \ell(w')$. Weil dann aber auch $vssw' = 1$, so folgt $\ell(vs) = \ell(sw') = \ell(w') + 1 = \ell(v) + 1$. Dies widerspricht unserer Fallannahme. Folglich ist $vw' \neq 1$ und der Beweis ist erbracht. ∎

Nun können wir die allgemeine Theorie für Algebren mit assoziativen, symmetrischen und nicht ausgearteten Bilinearformen anwenden, etwa [21, Proposition (9.17), S. 204]. Das zentrale Idempotent $z_\lambda$ lässt sich in der folgenden Weise angeben:

$$z_\lambda = \frac{d_\lambda}{t_\lambda} \sum_{w \in \mathrm{S}_k} \chi^\lambda(T_w) T_{w^{-1}}. \tag{3.33}$$

Dabei ist

$$t_\lambda = \sum_{w \in \mathrm{S}_k} \chi^\lambda(T_w) \chi^\lambda(T_{w^{-1}}) \tag{3.34}$$

von Null verschieden. Ferner gilt

$$t_\lambda = d_\lambda^{-1} \chi^\lambda(t) \quad \text{mit} \quad t = \sum_{w \in \mathrm{S}_k} T_w T_{w^{-1}}. \tag{3.35}$$

In unserem Fall der Hecke-Algebra kann man sogar noch etwas mehr aussagen.

**Lemma 3.17** *Das Element* $t = \sum_{w \in \mathrm{S}_k} T_w T_{w^{-1}}$ *ist zentral in* $H_k(q)$. *Es gilt* $t = \sum_{\lambda \vdash k} t_\lambda z_\lambda$.

*Beweis*. Wir fixieren $s = s_i$ für ein $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und definieren die Menge $L = \{w \in \mathrm{S}_k \mid \ell(sw) > \ell(w)\}$. Dann ist $\mathrm{S}_k$ die disjunkte Vereinigung von $L$ und $sL$. Wegen (3.27) gilt dann $T_{sw}T_{(sw)^{-1}} = T_sT_wT_{w^{-1}}T_s$, $w \in L$. Wegen (3.29) erhalten wir

$$\begin{aligned} T_stT_s &= \sum_{w\in L\cup sL} T_sT_wT_{w^{-1}}T_s = \sum_{w\in L}(T_sT_wT_{w^{-1}}T_s + T_s^2T_wT_{w^{-1}}T_s^2) \\ &= \sum_{w\in L}(T_sT_wT_{w^{-1}}T_s + T_s^2T_wT_{w^{-1}}(\hat{q}T_s+1)) \\ &= \sum_{w\in L}(T_sT_wT_{w^{-1}}T_s + (\hat{q}T_s+1)T_wT_{w^{-1}} + \hat{q}T_sT_sT_wT_{w^{-1}}T_s) \\ &= \sum_{w\in L}(T_sT_wT_{w^{-1}}T_s + T_wT_{w^{-1}}) + \hat{q}T_s\sum_{w\in L}(T_wT_{w^{-1}} + T_sT_wT_{w^{-1}}T_s) = t + \hat{q}T_st. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit $T_s^{-1}$ und benutzt $T_s^{-1} = T_s - \hat{q}$, so erhält man $tT_s = T_st$. Folglich ist $t$ zentral. Wendet man $\chi^\lambda$ auf den Ansatz $t = \sum_{\mu\vdash k}\alpha_\mu z_\mu$, $\alpha_\mu \in \mathbb{C}$ an und verwendet $\chi^\lambda(z_\mu) = \delta_{\lambda\mu}d_\lambda$, was aus (3.33) und (3.34) folgt, so ergibt sich $\alpha_\lambda = t_\lambda$. ■

Wir betrachten drei für unsere Untersuchungen wichtige Abbildungen der Ordnung zwei $\alpha_k$, $\beta_k$ und $\iota_k$ von $H_k(q)$. Auf den Generatoren sind sie gegeben durch $\alpha_k(T_i) := T_{k-i}$, $\beta_k(T_i) := T_i$, bzw. $\iota_k(T_i) := -T_i^{-1}$. Die Zuordnung $\alpha_k$ kann zu einem Algebrenhomomorphismus von $H_k(q)$ fortgesetzt werden, während $\beta_k$ und $\iota_k$ zu Antihomomorphismen von $H_k(q)$ fortgesetzt werden können, da sie die erzeugenden Relationen der Hecke-Algebra invariant lassen. Man prüft leicht nach, dass die der drei Morphismen auf $H_k(q)$ folgendermaßen aussehen. Für alle $w \in \mathrm{S}_k$ gilt:

$$\alpha_k(T_w) = T_{w_\circ}T_wT_{w_\circ}^{-1}, \qquad \beta_k(T_w) = T_{w^{-1}}, \qquad \iota_k(T_w) = \mathrm{sgn}(w)T_w^{-1}. \tag{3.36}$$

Für $\alpha_k$ beachte man (3.11). Offenbar sind die drei Abbildungen paarweise miteinander vertauschbar.

**Lemma 3.18** *Es sei $\lambda \vdash k$ eine Partition von $k$. Dann gilt für das minimale zentrale Idempotent $z_\lambda$ von $H_k(q)$: $\alpha_k(z_\lambda) = z_\lambda$, $\iota_k(z_\lambda) = z_{\lambda'}$ und $\beta_k(z_\lambda) = z_\lambda$.*

*Beweis*. Für $\alpha_k$ folgt die Behauptung sofort aus der Darstellung (3.33) und der Tatsache, dass Charaktere auf konjugierten Elementen gleich sind. Wir führen den Beweis für die Involution $\iota_k$.
(a) Zunächst zeigen wir die Behauptung für den Symmetrisator $z_{(k)}$ und den Antisymmetrisator $z_{(1^k)}$. Sie erzeugen jeweils ein eindimensionales Ideal in $H_k(q)$. Das zentrale Idempotent $z_{(k)}$ bzw. $z_{(1^k)}$ ist das eindeutig bestimmte zentrale von Null verschiedene Element aus $H_k(q)$ mit $T_iz_{(k)} = qz_{(k)}$ bzw. $T_iz_{(1^k)} = -q^{-1}z_{(1^k)}$ für alle $i = 1, \dots, k-1$. Da das Bild eines zentralen Idempotents unter einem Antihomomorphismus erneut ein zentrales Idempotent ist, und wegen

$$T_i\,\iota_k(z_{(k)}) = -\iota_k(z_{(k)}T_i^{-1}) = -q^{-1}\iota_k(z_{(k)}), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

erhalten wir $\iota_k(z_{(k)}) = z_{(1^k)}$. Da der Antiautomorphismus $\iota_k$ die Ordnung 2 hat, gilt ferner $\iota_k(z_{(1^k)}) = z_{(k)}$.

(b) Nun sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ eine beliebige Partition. Ferner sei $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ das zu $\lambda$ konjugierte Diagramm. In [37] wurden zu einem gegebenen Young-Tableau ein minimales Idempotent $p_\lambda = h_- e_- h_-^{-1} h_+ e_+ h_+^{-1}$ konstruiert. Dabei sind $e_- = A_{\lambda'_1} \times \cdots \times A_{\lambda'_s}$ und $e_+ = S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_r}$, wobei $A_j = z_{(1^j)}$ und $S_j = z_{(j)}$ den $j$-ten Antisymmetrisator bzw. den $j$-ten Symmetrisator der Hecke-Algebra $H_j(q)$ bezeichnen. Wir machten dabei von den natürlichen Einbettungen $H_{n_1}(q) \times \cdots \times H_{n_r}(q) \to H_k(q)$ für Kompositionen $n \models k$ Gebrauch. Die Elemente $h_\pm$ hängen noch von den Eintragungen des Young-Tableaus ab. Nach dem Ergebnis von (a) gilt $\iota_k(e_-) = S_{\lambda'_1} \times \cdots \times S_{\lambda'_s}$ und $e'_+ = A_{\lambda_1} \times \cdots \times A_{\lambda_r}$. Da $p_\lambda$ ein minimales Unteridempotent von $z_\lambda$ ist, ist $\iota_k(p_\lambda)$ ein minimales Unteridempotent von $z_{\lambda'}$. Wegen $z_\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} p_\lambda^i$ und $\iota_k(p_\lambda^i)\iota_k(p_\lambda^j) = \delta_{ij}\iota_k(p_\lambda^i)$ ist $\iota_k(z_\lambda)$ ein Unteridempotent von $z_{\lambda'}$. Da aber $\iota_k(z_\lambda)$ ein von Null verschiedenes minimales zentrales Idempotent ist, erhalten wir schließlich $\iota_k(z_\lambda) = z_{\lambda'}$.
Wir zeigen $\beta_k(z_\lambda) = z_\lambda$, ohne die obige explizite Konstruktion der minimalen irreduziblen Idempotente aus [37] zu verwenden. Dafür benutzen wir aber ein Resultat von Ram. Für eine Komposition $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \models k$ bezeichne $\gamma_\mu = \gamma_{\mu_1} \times \gamma_{\mu_2} \times \cdots \times \gamma_{\mu_r}$ diejenige Permutation aus $\mathrm{S}_k$, die sich als Produkt der $r$ disjunkten (eingebetteten) Zyklen $\gamma_{\mu_i}$ schreiben lässt, wobei

$$\gamma_n := s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_1$$

ist. Offensichtlich gilt dann für die Elemente $T_{\gamma_n}$ der Hecke-Algebra $H_k(q)$, dass $\alpha_n(T_{\gamma_n}) = \beta_n(T_{\gamma_n})$, da das Vertauschen der Reihenfolge der Faktoren gerade mit dem inneren Automorphismus $T_{w_\circ}(\cdot)T_{w_\circ}^{-1}$ übereinstimmt. Wir fixieren nun ein Basiselement $T_w$, $w \in \mathrm{S}_k$. Nach [83, Theorem 5.1] gibt es dann ein Element

$$c_w = \sum_{\mu \models k} a_{w\mu} T_{\gamma_\mu}$$

mit $a_{w\mu} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ derart, dass $\chi(T_w) = \chi(c_w)$ für alle Charaktere der Hecke-Algebra $H_k(q)$. Also gilt für alle Charaktere $\chi$

$$\chi(\beta_k(T_w)) = \sum_{\mu \models k} a_{w\mu}\chi(\beta_k(T_{\gamma_\mu})) = \sum_{\mu \models k} a_{w\mu}\chi(T_{\gamma_\mu}) = \chi(c_w) = \chi(T_w).$$

In der ersten Gleichung benutzten wir, dass auch $\chi \circ \beta_k$ ein Charakter ist. In der zweiten Gleichung verwendeten wir, dass $\alpha_k$ und $\beta_k$ auf $T_{\gamma_n}$ übereinstimmen und dass $\chi(\alpha_k(h)) = \chi(h)$ für alle $h \in H_k(q)$, weil $\alpha_k$ ein innerer Automorphismus ist. Somit gilt also $\chi(T_w) = \chi(T_{w^{-1}})$ für alle $w \in \mathrm{S}_k$ und alle Charaktere $\chi$ von $H_k(q)$. Setzt man dies in (3.33) ein, so erhält man $\beta_k(z_\lambda) = z_\lambda$. Es sei nun $p_\lambda$ ein primitives Idempotent zu fixiertem $\lambda$. Da

$$\beta_k(p_\lambda)z_\lambda = \beta_k(z_\lambda)\beta_k(p_\lambda) = \beta_k(p_\lambda z_\lambda) = \beta_k(p_\lambda),$$

ist auch $\beta_k(p_\lambda)$ ein zu $p_\lambda$ äquivalentes primitives Idempotent. ■

### 3.3.2 Die Algebra $H_k(q) \otimes H_k(q)$ und ihr Antisymmetrisator

Die Algebra $\mathcal{H}_k(q) = H_k(q) \otimes H_k(q)$ spielt in unseren Untersuchungen zu den Poincaré-Reihen der Differentialkalküle eine wichtige Rolle. Wir wollen hauptsächlich den Antisymmetrisator

$\boldsymbol{a}_k$ von $\mathcal{H}_k(q)$ studieren. Wir definieren ihn wie folgt. Es sei eine Abbildung $\boldsymbol{\sigma}$ auf den Generatoren $b_i$ der Zopfgruppe $\mathrm{B}_k$ durch $\boldsymbol{\sigma}(b_i) = T_i \otimes T_i^{-1}$ gegeben. Da die Elemente $\boldsymbol{\sigma}(b_i)$ ebenfalls die Zopfgruppenrelationen (3.4) und (3.5) erfüllen, lässt sich $\boldsymbol{\sigma}$ eindeutig zu einem Algebrenhomomorphismus von der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{B}_k$ nach $\mathcal{H}_k(q)$ fortsetzen. Man prüft leicht nach, dass dabei gilt

$$\boldsymbol{\sigma}_w := \boldsymbol{\sigma}(b_w) = \mathrm{sgn}(w)\beta_k(T_w) \otimes \iota_k(T_w), \quad w \in \mathrm{S}_k.$$

Es sei $\boldsymbol{a}_k$ das Bild des Antisymmetrisators $\boldsymbol{A}_k$ der Zopfgruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{B}_k$, vgl. (3.6)

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}_k) = \sum_{w \in \mathrm{S}_k} \beta_k(T_w) \otimes \iota_k(T_w). \tag{3.37}$$

Wir erhalten dann z. B.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_2 = 1 - T_1 \otimes T_1^{-1},\\
&\boldsymbol{a}_3 = 1 - T_1 \otimes T_1^{-1} - T_2 \otimes T_2^{-1} + T_1T_2 \otimes T_1^{-1}T_2^{-1} + T_2T_1 \otimes T_2^{-1}T_1^{-1} - T_1T_2T_1 \otimes T_1^{-1}T_2^{-1}T_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Entsprechend definieren wir die Summen der Schiebepermutationen $\boldsymbol{a}_{i,j} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}_{i,j})$ für $i + j = k$. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist die Spektralzerlegung des Antisymmetrisators $\boldsymbol{a}_k \in \mathcal{H}_k(q)$.

**Satz 3.19** *Der Antisymmetrisator $\boldsymbol{a}_k$ aus $\mathcal{H}_k(q)$ besitzt die folgende Spektralzerlegung*

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{\lambda \vdash k} t_\lambda \pi_\lambda. \tag{3.38}$$

*Dabei sind die Elemente*

$$\pi_\lambda = \frac{1}{t_\lambda} \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes \iota_k(z_\lambda)), \quad \lambda \vdash k \tag{3.39}$$

*paarweise orthogonale Idempotente in $\mathcal{H}_k(q)$. Ferner gilt*

$$(\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Tr})\pi_\lambda = s_{\lambda'}(x_1, \ldots, x_N) s_\lambda(x_1, \ldots, x_N). \tag{3.40}$$

*Beweis.* Die entscheidende Formel für den Beweis der Idempotenz von $\pi_\lambda$ ist

$$\boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(h)) = \boldsymbol{a}_k(h \otimes 1), \quad h \in \mathcal{H}_k(q). \tag{3.41}$$

Wir führen den Beweis in drei Schritten.
(a) Es sei $k = 2$ und $h = T = T_1$. Wegen $T^2 = 1 + \hat{q}T$ und $T^{-2} = 1 - \hat{q}T^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_2(1 \otimes \iota_2(T)) &= (1 \otimes 1 - T \otimes T^{-1})(1 \otimes (-T^{-1}))\\
&= 1 \otimes (-T^{-1}) + T \otimes (-\hat{q}T^{-1} + 1)\\
&= (1 + \hat{q}T) \otimes (-T^{-1}) + T \otimes 1\\
&= (T \otimes (-T^{-1}) + 1 \otimes 1)(T \otimes 1)\\
&= \boldsymbol{a}_2(T \otimes 1).
\end{aligned}$$

(b) Nun sei $k > 2$. Wegen (3.8) gilt für alle $i, j$ mit $i + j + 1 = k$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_k &= \boldsymbol{a}_{i+1,j}(\boldsymbol{a}_{i+1} \otimes \boldsymbol{a}_j)\\ &= \boldsymbol{a}_{i+1,j}\big(\boldsymbol{a}_{i-1,2}(\boldsymbol{a}_{i-1} \otimes \boldsymbol{a}_2) \otimes \boldsymbol{a}_j\big)\\ &= y(\boldsymbol{a}_{i-1} \otimes \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_j)\end{aligned}$$

mit $y = \boldsymbol{a}_{i+1,j}(\boldsymbol{a}_{i-1,2} \otimes 1)$. Dabei wirkt $\boldsymbol{a}_{i-1,2}$ an den ersten $i + 1$ Positionen. Zusammen mit dem Ergebnis von (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(T_i)) &= y(\boldsymbol{a}_{i-1} \otimes \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_j)(1 \otimes \iota_k(T_i))\\ &= y(\boldsymbol{a}_{i-1} \otimes \boldsymbol{a}_2(1 \otimes \iota_2(T)) \otimes \boldsymbol{a}_j)\\ &= y(\boldsymbol{a}_{i-1} \otimes \boldsymbol{a}_2(T \otimes 1) \otimes \boldsymbol{a}_j)\\ &= \boldsymbol{a}_k(T_i \otimes 1).\end{aligned}$$

(c) Nun sei (3.41) für $h$ und $g$ aus $H_k(q)$ erfüllt. Dann gilt die Gleichung auch für $hg$, denn

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(hg)) &= \boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(g)\iota_k(h)) = \boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(g))(1 \otimes \iota_k(h)) = \boldsymbol{a}_k(g \otimes 1)(1 \otimes \iota_k(h))\\ &= \boldsymbol{a}_k(1 \otimes \iota_k(h))(g \otimes 1) = \boldsymbol{a}_k(h \otimes 1)(g \otimes 1) = \boldsymbol{a}_k(hg \otimes 1).\end{aligned}$$

Da die Menge der $T_i$ die Hecke-Algebra $H_k(q)$ erzeugt, ist der Beweis von (3.41) erbracht.
Wir zeigen nun, dass $\boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes \iota_k(z_\lambda))$ wesentlich idempotent ist. Beachtet man, dass $1 \otimes z_\lambda$ ein zentrales Idempotent in $\mathcal{H}_k(q)$ ist und Lemma 3.17 und wendet man mehrmals die Gleichung (3.41) sowie die Definition (3.37) des Antisymmetrisators an, so erhält man

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes \iota_k(z_\lambda)))^2 &= \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\\ &= \boldsymbol{a}_k^2(z_\lambda \otimes 1)\\ &= \boldsymbol{a}_k \textstyle\sum_{w\in \mathrm{S}_k}(\beta_k(T_w)z_\lambda \otimes \iota_k(T_w))\\ &= \boldsymbol{a}_k \textstyle\sum_{w\in \mathrm{S}_k}(T_w T_{w^{-1}} z_\lambda \otimes 1)\\ &= \boldsymbol{a}_k(t z_\lambda \otimes 1)\\ &= t_\lambda \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\\ &= t_\lambda \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes \iota_k(z_\lambda)).\end{aligned}$$

Folglich ist $\pi_\lambda$ idempotent. Benutzt man erneut (3.41) und $z_\lambda z_\mu = 0$ für $\lambda \neq \mu$, so erhält man

$$\pi_\lambda \pi_\mu = t_\lambda^{-1} t_\mu^{-1} \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\boldsymbol{a}_k(z_\mu \otimes 1) = t_\lambda^{-1} t_\mu^{-1} \boldsymbol{a}_k^2(z_\lambda z_\mu \otimes 1) = 0,$$

d. h., $\pi_\lambda$ und $\pi_\mu$ sind orthogonal zueinander. Wegen $1 = \sum_\lambda z_\lambda$ und $\sum_\lambda \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes \iota_k(z_\lambda)) = \sum_\lambda \boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1) = \boldsymbol{a}_k$, ergibt sich (3.38).
Zur letzten Behauptung. Wir schreiben $\boldsymbol{x}$ für die Gesamtheit der kommutierenden Variablen $x_1, \ldots, x_N$. Vertauscht man die Rollen von $w$ und $w^{-1}$ in (3.33), wendet dann die Involution $\iota_k$ an und benutzt Lemma 3.18, so hat man schließlich

$$z_{\lambda'} = \frac{d_\lambda}{t_\lambda} \sum_{w\in \mathrm{S}_k} \chi^\lambda(T_{w^{-1}})\iota_k(T_w).$$

Wendet man darauf $\chi^{\lambda'}$ an, dividiert durch $\chi^{\lambda'}(z_{\lambda'}) = d_{\lambda'} = d_\lambda$ und multipliziert mit $s_\lambda(\boldsymbol{x})s_{\lambda'}(\boldsymbol{x})$, so erhält man schließlich mit (3.32) und (3.39)

$$\begin{aligned}
s_\lambda(\boldsymbol{x})s_{\lambda'}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{t_\lambda}\sum_{w\in \mathrm{S}_k} \chi^\lambda(T_{w^{-1}})\chi^{\lambda'}(\iota_k(T_w))s_\lambda(\boldsymbol{x})s_{\lambda'}(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{1}{t_\lambda}\sum_{w\in \mathrm{S}_k} \mathrm{Tr}(T_{w^{-1}}z_\lambda)\mathrm{Tr}(\iota_k(T_w)z_{\lambda'}) \\
&= (\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{Tr})\left(\frac{1}{t_\lambda}\sum_{w\in \mathrm{S}_k}(T_{w^{-1}}\otimes \iota_k(T_w))(z_\lambda\otimes\iota_k(z_\lambda))\right) \\
&= (\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{Tr})\left(\frac{1}{t_\lambda}\boldsymbol{a}_k(z_\lambda\otimes\iota_k(z_\lambda))\right) = (\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{Tr})\pi_\lambda.
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung 3.8** Die explizite Formel für den Eigenwert $t_\lambda$ lautet: $t_\lambda = k!q^{c(\lambda)}h_q(\lambda)/h(\lambda)$, wobei $h_q(\lambda) = \prod_{x\in\lambda}[\![h(x)]\!]_q$ das Produkt der $q$-Hakenlängen ist. Zum Beweis benutzen wir die Formel [38, (1.6)]. Da wir eine andere Version der Hecke-Algebra und auch andere $q$-Zahlen verwenden, müssen wir einige Transformationen vornehmen. Wir bezeichnen die Hecke-Algebra in [38] mit $\mathrm{H}_k(q)$ und ihre Generatoren mit $g_i$. Die Abbildung $\mathrm{H}_k(q^2)\to H_k(q)$, die durch $g_i\mapsto qT_i$, $i=1,\dots,k-1$ gegeben wird, definiert einen Algebrenisomorphismus. Die Formel (1.6) aus [38] lautet dann für die Hecke-Algebra $\mathrm{H}_k(q)$ mit den Generatoren $g_i$:

$$\sum_{w\in \mathrm{S}_k}\chi^\lambda(g_w)\chi^\mu(q^{-2\ell(w)}g_{w^{-1}}) = \delta_{\lambda\mu}k!q^{-2n(\lambda)}h(\lambda)^{-1}\prod_{x\in\lambda}\frac{1-q^{2h(x)}}{1-q^2}.$$

Benutzt man den obigen Isomorphismus $g_w\mapsto q^{\ell(w)}T_w$ und die Definition von $t_\lambda$, so erhalten wir für $\mu=\lambda$ wegen (3.34) auf der linken Seite

$$t_\lambda = \sum_{w\in \mathrm{S}_k} q^{\ell(w)}\chi^\lambda(T_w)q^{-2\ell(w)}\chi^\lambda(T_{w^{-1}})q^{\ell(w)}.$$

Wendet man die Identitäten $\sum_{x\in\lambda}h(x) = n(\lambda)+n(\lambda')+|\lambda|$ und $n(\lambda')-n(\lambda)=c(\lambda)$ aus [67, S. 11] an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
t_\lambda &= k!q^{-2n(\lambda)+\sum_{x\in\lambda}h(x)-k}h(\lambda)^{-1}\prod_{x\in\lambda}\frac{q^{h(x)}-q^{-h(x)}}{q-q^{-1}} \\
&= k!q^{n(\lambda')-n(\lambda)}h(\lambda)^{-1}\prod_{x\in\lambda}[\![h(x)]\!]_q \\
&= k!q^{c(\lambda)}h(\lambda)^{-1}h_q(\lambda).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.20** *Es sei $\lambda\vdash k$, eine symmetrische Partition von $k$, d. h. $\lambda=\lambda'$, und $\pi\in\mathcal{H}_k(q)$ ein Idempotent mit $\pi\pi_\lambda=\pi$. Dann gilt*

$$\boldsymbol{\sigma}_{w_\circ}\pi = \mathrm{sgn}(w_\circ)\pi.$$

*Beweis*. (a) Wir benutzen die Iwahori-Hecke-Algebra $H_k$ über dem Körper $\mathbb{C}(x)$, der rationalen Funktionen in $x$ um zu zeigen, dass $T_{w_\circ}^2 z_\lambda = z_\lambda$ gilt. Wegen (3.11) ist $T_{w_\circ}^2$ zentral. Also existieren Koeffizienten $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}(x)$ mit $T_{w_\circ}^2 = \sum_\lambda \alpha_\lambda z_\lambda$. Da $T_{w_\circ}$ invertierbar ist, gilt $T_{w_\circ}^{-2} = \sum_\lambda \alpha_\lambda^{-1} z_\lambda$. Wegen $\lambda = \lambda'$ und Lemma 3.18 gilt $\iota_k(z_\lambda) = z_\lambda$. Somit erhalten wir

$$\alpha_\lambda z_\lambda = \iota_k(\alpha_\lambda z_\lambda) = \iota_k(T_{w_\circ}^2 z_\lambda) = z_\lambda T_{w_\circ}^{-2} = \alpha_\lambda^{-1} z_\lambda.$$

Also gilt $\alpha_\lambda^2 = 1$. Es sei $\alpha_\lambda(x) = g(x)/h(x)$ mit gewissen Polynomen $g$ und $h$. Da aber $\alpha_\lambda(x)$ nur höchstens zwei Werte, nämlich $1$ und $-1$, annimmt, tritt mindestens einer der beiden Werte, etwa $y_0$, unendlich oft auf: $\alpha_\lambda(x_i) = y_0$, $i \in \mathbb{N}$. Dann hat aber das Polynom $f(x) = g(x) - y_0 h(x)$ unendlich viele Nullstellen $x_i$, $i \in \mathbb{N}$. Folglich ist $f \equiv 0$, und $\alpha_\lambda(x) \equiv y_0$ ist konstant. Also hängt der gesuchte Wert $y_0$ auch für die Hecke-Algebra $H_k(q)$ nicht vom Parameter $q$ ab. Setzt man $q = 1$, so hat man $T_{w_\circ}^2|_{q=1} = 1$, da in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathrm{S}_k$ das längste Wort $w_\circ(i) = k - i$ eine Involution ist. Somit gilt allgemein $\alpha_\lambda = 1$.
(b) Mit der Definition von $\pi_\lambda$, (3.11), $w_\circ = w_\circ^{-1}$, (3.41) und dem Ergebnis von (a) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{w_\circ}\pi = \boldsymbol{\sigma}_{w_\circ}\pi_\lambda\pi &= t_\lambda^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{w_\circ}\boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\pi \\
&= t_\lambda^{-1}\boldsymbol{a}_k(\mathrm{sgn}(w_\circ)\beta_k(T_{w_\circ}) \otimes \iota_k(T_{w_\circ}))(z_\lambda \otimes 1)\pi \\
&= t_\lambda^{-1}\mathrm{sgn}(w_\circ)\boldsymbol{a}_k(T_{w_\circ}^2 z_\lambda \otimes 1)\pi \\
&= t_\lambda^{-1}\mathrm{sgn}(w_\circ)\boldsymbol{a}_k(z_\lambda \otimes 1)\pi \\
&= \mathrm{sgn}(w_\circ)\pi_\lambda\pi = \mathrm{sgn}(w_\circ)\pi.
\end{aligned}$$

∎

## 3.4 Kodarstellungen von Koordinatenhopfalgebren

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe und Fakten aus der Theorie der Kodarstellungen von Hopfalgebren. Insbesondere gilt unsere Aufmerksamkeit den Koordinatenhopfalgebren zu den Quantengruppen $G_q$. Alle auftretenden Kodarstellungen seien endlichdimensional.

### 3.4.1 Kohalbeinfache Hopfalgebren

Wir übernehmen Definitionen und einfachste Sätze aus [62, Abschnitt 11.2]. Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra. Mit $\widehat{\mathcal{A}}$ bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen $\lambda$ irreduzibler Kodarstellungen $\boldsymbol{u}^\lambda$ von $\mathcal{A}$. Ein lineares Funktional $h$ auf $\mathcal{A}$ heißt *linksinvariant* bzw. *rechtsinvariant*, falls für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt

$$h * a = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = h(a)1 \quad \text{bzw.} \quad a * h = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = h(a)1. \tag{3.42}$$

**Definition 3.6 (und Satz)** Eine Hopfalgebra $\mathcal{A}$ heißt *kohalbeinfach*, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Jede Kodarstellung von $\mathcal{A}$ ist die direkte Summe von irreduziblen Unterkodarstellungen.
(ii) Die Koalgebra $\mathcal{A}$ ist die direkte Summe ihrer koeinfachen Unterkoalgebren:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}} \mathcal{C}(u^\alpha).$$

(iii) Die Menge $\{u^\alpha_{ij} \mid \alpha \in \widehat{\mathcal{A}},\ i,\ j = 1, \dots, d_\alpha\}$ ist eine lineare Basis von $\mathcal{A}$.
(iv) Es existiert ein eindeutig bestimmtes links- und rechtsinvariantes Funktional $h$ auf $\mathcal{A}$ mit $h(1) = 1$.

Einen Beweis der Äquivalenz findet man in [62, Theorem 11.13, S. 403]. Die Eigenschaft (ii) nennt man auch Peter-Weyl-Zerlegung von $\mathcal{A}$, und das in (iv) auftretende lineare Funktional $h$ heißt *Haarfunktional* von $\mathcal{A}$. Es sei nun $\mathcal{A}$ eine kohalbeinfache Hopfalgebra mit Haarfunktional $h$. Für $\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}$ sei $P^\alpha \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ die Projektion auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\alpha)$. Insbesondere gilt für $a = \sum_{\lambda,i,j} c^\lambda_{ij} u^\lambda_{ij}$, $c^\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, dass $P^\alpha(a) = \sum_{i,j} c^\alpha_{ij} u^\alpha_{ij}$. Wir definieren die linearen Funktionale $h^\alpha$, $\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ vermöge $h^\alpha = \varepsilon \circ P^\alpha$. Offensichtlich gilt dann

$$\sum_{\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}} h^\alpha = \varepsilon \quad \text{und} \quad (P^\alpha \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes P^\alpha)\Delta = (P^\alpha \otimes P^\alpha)\Delta = \Delta \circ P^\alpha.$$

Man rechnet leicht nach, dass $h^\alpha * a = a * h^\alpha = P^\alpha(a)$. Man beachte, dass der eindimensionalen trivialen Kodarstellung $\mathbf{1}$ das Haarfunktional $h = h^0$ entspricht. Wir nummerieren es einfach mit $\alpha = 0$.

**Lemma 3.21** *Das Haarfunktional $h$ einer kohalbeinfachen Hopfalgebra $\mathcal{A}$ ist regulär, d. h., $h(ab) = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$ impliziert $b = 0$, und $h(ab) = 0$ für alle $b \in \mathcal{A}$ impliziert $a = 0$.*

*Beweis.* Wir benutzen die Ergebnisse und die Notation aus [62, Kapitel 11.2]. Es sei $h(ab) = 0$ für alle $b \in \mathcal{A}$ und $a = \sum_{\lambda,i,j} c^\lambda_{ij} u^\lambda_{ij}$. Wir fixieren $\beta \in \widehat{\mathcal{A}}$ und $k, l \in \{1, \dots, d_\beta\}$ und wählen $b := S(u^\beta_{nk})(F^{-1})_{ln}\, \mathrm{tr}(F)$. Dann erhält man nach [62, Proposition 15]

$$\begin{aligned} 0 = h(ab) &= \sum_{\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c^\alpha_{ij} h\big(u^\alpha_{ij} S(u^\beta_{nk})(F^{-1})_{ln}\, \mathrm{tr}(F)\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_\beta} c^\beta_{ij} \delta_{ik} \frac{F_{nj}}{\mathrm{tr}(F)} (F^{-1})_{ln}\, \mathrm{tr}(F) = c^\beta_{kl}. \end{aligned}$$

Da dies für alle $\beta \in \widehat{\mathcal{A}}$, $k, l = 1, \dots, d_\beta$ gilt, folgt $a = 0$. Der Beweis der zweiten Implikation verläuft analog. ■

**Lemma 3.22** *Es sei $\mathcal{A}$ eine kohalbeinfache Hopfalgebra und $c$ ein zentrales Element der dualen Algebra $\mathcal{A}^*$.*
(i) *Für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt dann $a_{(1)} c(a_{(2)}) = c(a_{(1)}) a_{(2)}$.*
(ii) *Für alle $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$ existieren komplexe Zahlen $E_\lambda(c)$ derart, dass $c$ in der linksregulären Darstellung auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ als $E_\lambda(c)$-faches der Identität wirkt, d. h., für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt*

$$c * h^\lambda * a = E_\lambda(c) h^\lambda * a \quad \textit{und} \quad c(h^\lambda * a) = E_\lambda(c) h^\lambda(a). \tag{3.43}$$

*Beweis*. (i) Da $c$ zentral ist, gilt für alle $f \in \mathcal{A}^*$ und $a \in \mathcal{A}$

$$0 = \langle fc - cf, a \rangle = f(a_{(1)})c(a_{(2)}) - c(a_{(1)})f(a_{(2)}) = f\big(a_{(1)}c(a_{(2)}) - c(a_{(1)})a_{(2)}\big).$$

Da $\mathcal{A}^*$ die Punkte von $\mathcal{A}$ trennt, folgt die Behauptung.
(ii) Die linksreguläre Darstellung $\rho$ von $\mathcal{A}^*$ auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$, gegeben durch

$$\rho(f)(P^\lambda(a)) := f * P^\lambda(a) = P^\lambda(a_{(1)})f(a_{(2)}),$$

ist irreduzibel, da jeder $\rho$-invariante Teilraum von $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ auch $\Delta$-invariant ist, und $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ ist als Koalgebra irreduzibel. Da $c$ zentral ist, vertauscht $\rho(c)$ mit allen Operatoren $\rho(f)$, $f \in \mathcal{A}^*$. Nach dem Schurschen Lemma ist also $\rho(c) = E_\lambda(c)\, I$ für eine gewisse komplexe Zahl $E_\lambda(c)$. ■

Bei der Untersuchung der Nichtausgeartetheit von Paarungen benötigen wir später häufig das folgende Lemma.

**Lemma 3.23** *Es sei $\mathcal{A}$ eine kohalbeinfache Hopfalgebra, und $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ seien irreduzible Matrixkodarstellungen von $\mathcal{A}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(i) $\dim \mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = 1$, (ii) $\dim \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}, \mathbf{1}) = 1$, (iii) $\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}} \cong \boldsymbol{w}$ *und* (iv) $\boldsymbol{v} \cong \boldsymbol{w}^{\mathrm{c}}$.

*Beweis*. (i) $\to$ (iii). Es seien $\{e_i\}$ und $\{f_l\}$ Vektorraumbasen der Darstellungsräume $V$ bzw. $W$ mit den gegebenen Kodarstellungen $\boldsymbol{v} = (v^i_j)$ und $\boldsymbol{w} = (w^l_k)$. Es sei $T = (T^{il}) \neq 0$ ein von Null verschiedener Morphismus von $\mathbf{1}$ nach $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$, also $T^{il}1 = v^i_j w^l_k T^{jk}$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $S(v^n_i)$, summiert über $i$ und setzt $\overline{T}^l_i{:=}T^{il}$, dann erhält man

$$\overline{T}^l_i (v^{\mathrm{c}})^i_n = w^l_k \overline{T}^k_n,$$

d. h. $\overline{T} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{w})$. Da $\overline{T} \neq 0$ und sowohl $\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}$ als auch $\boldsymbol{w}$ irreduzibel sind, folgt die Äquivalenz aus dem Schurschen Lemma.
(iii) $\to$ (i). Die obigen Schlüsse sind umkehrbar; somit ist $\mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$ zumindest nicht leer. Gäbe es einen weiteren zu $T$ linear unabhängigen Morphismus $T_1$, so enthielte auch $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{w})$ einen weiteren zu $\overline{T}$ linear unabhängigen Morphismus, was nach dem Schurschen Lemma wiederum nicht möglich ist. Also folgt (i) aus (iii).
(iii) $\to$ (iv). Nach [62, Proposition 11.15 (ii)] gilt $\boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}} \cong \boldsymbol{v}$. Also gilt $\boldsymbol{v} \cong \boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}} \cong \boldsymbol{w}^{\mathrm{c}}$. Die Umkehrung (iv) $\to$ (iii) folgt genauso.
(iv) $\to$ (ii). Es sei $U \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^{\mathrm{c}})$. Wegen der Irreduzibilität von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}^{\mathrm{c}}$ ist $U$ bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt. Dann gilt $U^k_i v^i_j = S(w^l_k)U^l_j$. Multiplikation von rechts mit $w^k_m$, Summation über $k$ und die Setzung $\widetilde{U}_{ik} := U^i_k$ liefert

$$\widetilde{U}_{ik} v^i_j w^k_m = \widetilde{U}_{jm} 1,$$

also $\widetilde{U} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}, \mathbf{1})$. Wie oben schließt man, dass es bis auf Vielfachheit keine weiteren von Null verschiedenen Morphismen in $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}, \mathbf{1})$ geben kann. ■

Als *Charakter* einer Matrixkodarstellung $\boldsymbol{v} = (v^i_j)_{i,j=1,\dots,d}$ von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir das Element $\chi_{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^d v^i_i$ von $\mathcal{A}$. Im Falle der Null-Kodarstellung setzten wir $\chi_{\boldsymbol{v}} = 0$. Ist $\mathcal{A}$ kohalbeinfach, dann sind zwei (endlichdimensionale) Kodarstellungen genau dann äquivalent, wenn ihre Charaktere übereinstimmen, vgl. [62, Corollary 11.18, S. 407]. Es seien $p_1$ und $p_2$ idempotente Elemente einer Algebra $\mathcal{B}$. Wir nennen $p_1$ und $p_2$ *äquivalent*, falls es Elemente $a$ und $b$ aus $\mathcal{B}$ gibt, für die $ab = p_1$ und $ba = p_2$ gilt.

**Lemma 3.24** *Es seien $p$ und $q$ Idempotente einer Algebra $\mathcal{B}$ mit $p \neq 0$ oder $q \neq 0$. Falls für alle $x \in \mathcal{B}$ die Gleichung $p_1 x p_2 = 0$ erfüllt ist, so sind $p_1$ und $p_2$ inäquivalent.*

*Beweis*. Angenommen, $p$ und $q$ seien äquivalent, dann gibt es Elemente $a$, $b \in \mathcal{B}$ mit $p = ab$ und $q = ba$. Da $p = p^3 = ababab$ und $q = q^3 = bababa$ nicht beide gleich Null sind, folgt $p\,a\,q \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind $p$ und $q$ inäquivalent. ∎

**Lemma 3.25** *Es seien $\mathcal{A}$ eine kohalbeinfache Hopfalgebra und $\boldsymbol{v} = (v^i_j)$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$ über dem linearen Raum $V$.*
(i) *Es sei $P \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$ idempotent. Dann definiert die Einschränkung von $\boldsymbol{v}$ auf das Bild von $P$ eine Unterkodarstellung $\boldsymbol{v}(P)$ von $\boldsymbol{v}$ mit dem Charakter $\chi_{\boldsymbol{v}(P)} = \sum_{i,j} P^i_j v^j_i$.*
(ii) *Es seien $P$ und $Q$ idempotente Elemente von $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$. Die entsprechenden Unterkodarstellungen $\boldsymbol{v}(P)$ und $\boldsymbol{v}(Q)$ sind genau dann zueinander äquivalent, wenn die Idempotente $P$ und $Q$ äquivalent sind.*
(iii) *Es seien $P_\alpha \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$, $\alpha = 0, \dots, m$, $P_0 \neq 0$ paarweise äquivalente Idempotente, und $P = \sum_\alpha c_\alpha P_\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$ sei ebenfalls idempotent. Dann gibt es nichtnegative ganze Zahlen $r$ und $s$ mit $s \neq 0$, so dass die folgenden Kodarstellungen einander äquivalent sind*

$$s \cdot \boldsymbol{v}(P) \cong r \cdot \boldsymbol{v}(P_0), \qquad \text{und es gilt} \quad \sum_\alpha c_\alpha = \frac{r}{s}.$$

*Beweis*. Wir summieren über sich wiederholende Indizes.
(i) Wir bestimmen die Matrixkoeffizienten der Unterkodarstellung $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}(P)$. Dazu seien $\{e_i\}$ und $\{f_l\}$ die Vektorraumbasen von $V$ bzw. $W := \mathrm{im}\, P$. Wir definieren die linearen Abbildungen $A \colon W \to V$ vermöge $Aw = w$, $w \in W$ und $B \colon V \to W$ über $Bv = Pv$, $v \in V$. Dann gilt offenbar $P = AB$ und $BA = \mathrm{id}_W$. Die Matrixelemente von $A$ und $B$ bezüglich der gewählten Basen sind dann bestimmt durch $f_l = \sum A^j_l e_j$ und $B(e_i) = \sum B^k_i f_k$. Es sei $\varphi$ die zur Kodarstellung $\boldsymbol{v}$ gehörige rechte Komodulabbildung $\varphi(e_i) = \sum e_j \otimes v^j_i$. Da $A = PA$ und $P = AB$ sind, erhalten wir mit $P \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$

$$\begin{aligned}\varphi(f_n) &= \sum \varphi(A^j_n e_j) = \sum e_i \otimes v^i_j A^j_n = \sum e_i \otimes v^i_j P^j_k A^k_n \\ &= \sum e_i \otimes v^j_k P^i_j A^k_n = \sum A^i_m e_i \otimes B^m_j v^j_k A^k_n = \sum f_m \otimes (B\boldsymbol{v}A)^m_n.\end{aligned}$$

Folglich ist auf $W$ eine Unterkodarstellung $\boldsymbol{w}$ mit den Matrixelementen $\boldsymbol{w} = B\boldsymbol{v}A$ gegeben. Somit ist $\chi_{\boldsymbol{w}} = \sum B^m_j v^j_k A^k_m = \sum (AB)^k_j v^j_k = \sum P^k_j v^j_k$.
(ii) Seien zunächst $P$ und $Q$ äquivalent, d. h., es gibt Elemente $A$, $B \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$ mit $P = AB$ und $Q = BA$. Nach (i) sind die Charaktere der Unterkodarstellungen $\boldsymbol{v}(P)$ und $\boldsymbol{v}(Q)$ gegeben

durch $\chi_{\boldsymbol{v}(P)} = \sum P^k_l v^l_k$ bzw. $\chi_{\boldsymbol{v}(Q)} = \sum Q^k_l v^l_k$. Setzt man $P = AB$ und $Q = BA$ ein und benutzt $B \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v})$, so erhält man

$$\chi_{\boldsymbol{v}(P)} = \sum A^k_x B^x_l v^l_k = \sum A^k_x v^x_l B^l_k = \sum Q^l_x v^x_l = \chi_{\boldsymbol{v}(Q)}.$$

Da $\mathcal{A}$ kohalbeinfach ist, folgt $\boldsymbol{v}(P) \cong \boldsymbol{v}(Q)$. Es seien nun $\boldsymbol{v}(P)$ und $\boldsymbol{v}(Q)$ äquivalente Kodarstellungen, d.h., es gibt eine bijektive Abbildung $J$ mit $J \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}(P), \boldsymbol{v}(Q))$. Es seien $W_1$ und $W_2$ die Bildräume von $P$ bzw. $Q$. Ferner seien $A_1, B_1$ und $A_2, B_2$ die $P$ bzw. $Q$ entsprechenden Abbildungen aus dem Beweis von (i), welche die Einbettung bzw. die Projektion beschreiben. Wegen $J \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{v}(P), \boldsymbol{v}(Q))$ gilt $J(B_1 v A_1) = (B_2 v A_2)J$. Wendet man die Koeins $\varepsilon$ auf diese Gleichung an und setzt $A = A_1 J^{-1} B_2$ sowie $B = A_2 J B_1$, so erhält man $AB = P$ und $BA = Q$, das heißt, $P$ und $Q$ sind äquivalent.
(iii) Nach (i) und (ii) gilt

$$\chi_{\boldsymbol{v}(P)} = \textstyle\sum_{k,l} P^k_l v^l_k = \sum_{k,l,\alpha} c_\alpha (P_\alpha)^k_l v^l_k = \sum_\alpha c_\alpha \chi_{\boldsymbol{v}(P_\alpha)} = \left(\sum_\alpha c_\alpha\right) \chi_{\boldsymbol{v}(P_0)}. \tag{3.44}$$

Da $\mathcal{A}$ kohalbeinfach ist, existieren positive ganze Zahlen $s_\beta$ und irreduzible von Null verschiedene Kodarstellungen $\boldsymbol{u}^\beta$ mit $\boldsymbol{v}(P_0) \cong \sum_\beta s_\beta \boldsymbol{u}^\beta$. Wir setzen $r_\beta := s_\beta \sum_\alpha c_\alpha$. Aus (3.44) folgt dann $\chi_{\boldsymbol{v}(P)} = \sum_\beta r_\beta \chi_{\boldsymbol{u}^\beta}$. Da $\mathcal{A}$ kohalbeinfach ist und die Charaktere irreduzibler Kodarstellungen linear unabhängig sind, sind $r_\beta$ nichtnegative ganze Zahlen und $\boldsymbol{v}(P) \cong \sum_\beta r_\beta \boldsymbol{u}^\beta$. Folglich ist $\sum_\alpha c_\alpha = s_\beta^{-1} r_\beta$ für alle $\beta$ nichtnegativ und rational (und konstant). Es gilt $s_\beta \boldsymbol{v}(P) \cong r_\beta \boldsymbol{v}(P_0)$ für alle $\beta$. ∎

Im Folgenden werden wir sehen, dass sich die Peter-Weyl-Zerlegung für das Koprodukt auch auf Hopf-Bimoduln überträgt. Es seien $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ Kodarstellungen von $\mathcal{A}$ und $\Gamma$ ein Hopf-Bimodul. Wir definieren die folgenden linearen Teilräume von $\Gamma$:

$$\Gamma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \{\rho \in \Gamma \mid \rho_{(-1)} \otimes \rho_{(0)} \otimes \rho_{(1)} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{v}) \otimes \Gamma \otimes \mathcal{C}(\boldsymbol{w})\}. \tag{3.45}$$

Offensichtlich sind die Räume $\Gamma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ Bikomoduln, da auf ihnen die rechte und linke Kowirkung von $\Gamma$ abgeschlossen ist. Natürlich sind es i. a. keine Hopf-Bimoduln, da die Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{A}$ die Kowirkung ändert. Wir schreiben kurz $\Gamma(\lambda, \mu)$ anstelle von $\Gamma(\boldsymbol{u}^\lambda, \boldsymbol{u}^\mu)$. Aufgrund der Peter-Weyl-Zerlegung gilt

$$\Gamma = \bigoplus_{\lambda,\mu \in \widehat{\mathcal{A}}} \Gamma(\lambda, \mu). \tag{3.46}$$

Wir ergänzen nun einen Satz, der eine Verbindung herstellt zwischen den beiden Hecke-Algebra-Darstellungen $\varrho$ und $\varrho_{\mathsf{c}}$ eines primitiven Idempotents und den entsprechenden Unterkodarstellungen von $\boldsymbol{u}^{\otimes k}$ bzw. $(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$.

**Lemma 3.26** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$. Ferner sei $p \in H_k(q)$ idempotent, $P^* = \varrho(\beta_k(p))$ und $P^{\mathsf{c}} = \varrho_{\mathsf{c}}(p)$. Dann sind die folgenden Kodarstellungen zueinander äquivalent*

$$(\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P^*))^{\mathsf{c}} \cong (\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(P^{\mathsf{c}}).$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Gleichung

$$\varrho_{\mathsf{c}}(h)^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}} = \varrho(\alpha_k(\beta_k(h)))^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} \tag{3.47}$$

für $h \in H_k(q)$. Dabei seien $\vec{\imath} = (i_1, \ldots, i_k)$ und $\vec{\jmath} = (j_1, \ldots, j_k)$ Multiindizes und $\overleftarrow{\imath} = (i_k, \ldots, i_1)$ bzw. $\overleftarrow{\jmath} = (j_k, \ldots, j_1)$. Wir benutzen die Schreibweise $u^{\vec{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}} := u^{i_1}_{j_k} u^{i_2}_{j_{k-1}} \cdots u^{i_k}_{j_1}$. Es sei zunächst $h = T_n$. Wegen $\alpha_k(T_n) = T_{k-n}$ und $\beta_k(T_n) = T_n$ gilt:

$$\varrho(\alpha_k(\beta_k(T_n)))^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = \varrho(T_{w_\circ} T_n T_{w_\circ}^{-1})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = \varrho(T_{k-n})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} = \hat{R}^{j_{k-n}, j_{k-n+1}}_{i_{k-n}, i_{k-n+1}} = \check{R}^{i_{k-n+1}, i_{k-n}}_{j_{k-n+1}, j_{k-n}} = \varrho_{\mathsf{c}}(T_n)^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}}.$$

Dies beweist (3.47) im Falle $h = T_n$. Nun sei (3.47) für $g, h \in H_k(q)$ erfüllt. Aufgrund der Darstellungseigenschaft von $\varrho$ und $\varrho_{\mathsf{c}}$ sowie der Antihomomorphie von $\beta_k$ erhalten wir schließlich

$$\varrho_{\mathsf{c}}(gh)^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}} = \textstyle\sum_{\vec{x}} \varrho_{\mathsf{c}}(g)^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{x}} \varrho_{\mathsf{c}}(h)^{\overleftarrow{x}}_{\overleftarrow{\jmath}} = \sum_{\vec{x}} \varrho(T_{w_\circ}\beta_k(g)T_{w_\circ}^{-1})^{\vec{x}}_{\vec{\imath}} \varrho(T_{w_\circ}\beta_k(h)T_{w_\circ}^{-1})^{\vec{\jmath}}_{\vec{x}} = \varrho(T_{w_\circ}\beta_k(gh)T_{w_\circ}^{-1})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}}.$$

Da die Menge $\{T_n\}$ die Hecke-Algebra $H_k(q)$ erzeugt, ist der Beweis von (3.47) vollendet. Im Folgenden summieren wir über doppelt auftretende Multiindizes. Wegen Lemma 3.25 (i), (3.47) und $S(\chi_{\boldsymbol{v}}) = \chi_{\boldsymbol{v}^{\mathsf{c}}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\chi_{(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(P^{\mathsf{c}})} &= \textstyle\sum (P^{\mathsf{c}})^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} (u^{\mathsf{c}})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} \\
&= \textstyle\sum \varrho(T_{w_\circ}\beta_k(p)T_{w_\circ}^{-1})^{\overleftarrow{\jmath}}_{\overleftarrow{\imath}} (u^{\mathsf{c}})^{\vec{\jmath}}_{\vec{\imath}} \\
&= \textstyle\sum \varrho(T_{w_\circ})^{\overleftarrow{\jmath}}_{\vec{x}} (P^*)^{\vec{x}}_{\vec{z}} \varrho(T_{w_\circ}^{-1})^{\vec{z}}_{\overleftarrow{\imath}} S\left(u^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}}\right) \\
&= S\left(\textstyle\sum \varrho(T_{w_\circ})^{\overleftarrow{\jmath}}_{\vec{x}} (P^*)^{\vec{x}}_{\vec{z}} \varrho(T_{w_\circ}^{-1})^{\overleftarrow{\imath}}_{\overleftarrow{\jmath}} u^{\vec{z}}_{\overleftarrow{\imath}}\right) \\
&= S\left(\textstyle\sum (P^*)^{\overleftarrow{\imath}}_{\vec{z}} u^{\vec{z}}_{\overleftarrow{\imath}}\right) \\
&= S(\chi_{(\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P^*))}) = \chi_{(\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P^*))^{\mathsf{c}}}.
\end{aligned}$$

In der vierten Gleichung benutzten wir, dass $\varrho(T_{w_\circ}^{-1}) \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes k})$ gilt. Da $\mathcal{A}$ kohalbeinfach ist, sind die Darstellungen $\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P^*)^{\mathsf{c}}$ und $(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(P^{\mathsf{c}})$ einander äquivalente Kodarstellungen. ∎

Da für ein primitives Idempotent $p \in H_k(q)$ das Bild $\beta_k(p)$ ein zu $p$ äquivalentes primitives Idempotent ist, erhalten wir

**Folgerung 3.27** *Es sei $\lambda \vdash k$, $p_\lambda \in H_k(q)$ ein primitives Idempotent zu $\lambda$, $P_\lambda = \varrho(p_\lambda)$ und $P^{\mathsf{c}}_\lambda = \varrho_{\mathsf{c}}(p_\lambda)$. Dann gilt*

$$(\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P_\lambda))^{\mathsf{c}} \cong (\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(P^{\mathsf{c}}_\lambda).$$

Wir wiederholen die Brauer-Schur-Weyl-Dualität für Quantengruppen vom Typ A, siehe auch [39] oder [62, Theorem 8.38, Proposition 11.20 und Proposition 11.21].

**Satz 3.28** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$. Ferner sei $q$ eine transzendente komplexe Zahl, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash k$ und $p_\lambda$ ein zu $\lambda$ gehöriges primitives Idempotent. Dann gilt:*

(i) *Die Darstellung* $\varrho\colon H_k(q) \to \operatorname{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes k})$ *ist surjektiv. Die Unterkodarstellung* $\boldsymbol{u}^\lambda := \boldsymbol{u}^{\otimes k}(\varrho(p_\lambda))$ *von* $\boldsymbol{u}^{\otimes k}$ *ist irreduzibel.*
(ii) *Es gilt*

$$\ker \varrho = \bigoplus_{\lambda \vdash k,\ \lambda_1' > N} z_\lambda H_k(q).$$

*Die Unterkodarstellung* $\boldsymbol{u}^\lambda$ *ist genau dann Null, wenn* $\lambda_1' > N$.

**Folgerung 3.29** *Es seien* $\mathcal{A}$ *und* $q$ *wie oben, und* $\lambda, \mu \vdash k$ *seien Partitionen von* $k$. *Dann gilt* $\boldsymbol{u}^\lambda \cong \boldsymbol{u}^\mu$ *genau dann, wenn* $\lambda = \mu$ *oder* $\lambda_1' > N$ *und* $\mu_1' > N$.

*Beweis*. $\leftarrow$ ist trivial. Wir zeigen die umgekehrte Richtung. Angenommen, es sei $\lambda_1' \le N$ oder $\mu_1' \le N$ und $\lambda \ne \mu$. Es seien $p_\lambda$ und $p_\mu$ primitive Idempotente aus $H_k(q)$, die zu den Partitionen $\lambda$ bzw. $\mu$ gehören. Ferner seien $P_\lambda = \varrho(p_\lambda)$ und $P_\mu = \varrho(p_\mu)$. Da nach dem obigen Satz $P_\lambda \ne 0$ oder $P_\mu \ne 0$ gilt und da $P_\lambda X P_\mu = 0$ für alle $X \in \operatorname{Mor}(u^{\otimes k})$, sind nach Lemma 3.24 $P_\lambda$ und $P_\mu$ inäquivalent. Nach Lemma 3.25 (ii) sind dann auch die Kodarstellungen $\boldsymbol{u}^\lambda$ und $\boldsymbol{u}^\mu$ inäquivalent. ∎

Wir untersuchen an dieser Stelle einen Hopf-Automorphismus, der zur Hodge-Zerlegung benötigt wird.

**Satz 3.30** *Es sei* $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ *bzw.* $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$. *Für* $k = 1, \dots, N$ *setzen wir* $k' = N + 1 - k$.
*Es existiert genau ein Hopf-Automorphismus* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *mit*

$$F(u^a_b) = S(u^{b'}_{a'}), \quad a, b = 1, \dots, N. \tag{3.48}$$

*Für alle* $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$ *gilt* $F(\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)) = \mathcal{C}((\boldsymbol{u}^\lambda)^{\mathrm{c}})$.

*Beweis*. (a) Wir zeigen, dass $F$ die Relationen der Hopfalgebra erhält. Man rechnet sofort nach, dass

$$\hat{R}^{ab}_{rs} = \hat{R}^{s'r'}_{b'a'} \quad \text{und} \quad d_k^{-1} = d_{k'}, \quad a, b, r, s, k = 1, \dots, N. \tag{3.49}$$

Darüber hinaus erfüllt der $q$-antisymmetrische Tensor $\varepsilon_{\vec{i}}$, der die Quantendeterminante $\mathcal{D}$ definiert, die folgende Relation $\varepsilon_{i_1 \cdots i_N} = \varepsilon_{i'_N \cdots i'_1}$. Wir zeigen, dass der Algebrenhomomorphismus $f\colon \mathbb{C}\langle u^i_j \rangle \to \mathbb{C}\langle v^i_j \rangle^{\mathrm{op,cop}}$, gegeben durch $f(u^a_b) = v^{b'}_{a'}$, die definierenden Relationen der Hopfalgebra $\mathcal{A}$ auf die der Hopfalgebra $\mathcal{A}^{\mathrm{op,cop}}$ abbildet. Dabei möge die freie Algebra $\mathbb{C}\langle v^i_j \rangle^{\mathrm{op,cop}}$ sowohl die umgekehrte Multiplikation als auch die umgekehrte Komultiplikation haben. Aufgrund der obigen numerischen Identitäten für $\hat{R}$ und $\varepsilon_{\vec{n}}$ haben wir

$$f(\hat{R}^{ab}_{xy} u^x_r \otimes u^y_s - u^a_x \otimes u^b_y \hat{R}^{xy}_{rs}) = \hat{R}^{y'x'}_{b'a'} v^{r'}_{x'} \otimes v^{s'}_{y'} - v^{x'}_{a'} \otimes v^{y'}_{b'} \hat{R}^{s'r'}_{y'x'}.$$

Die rechte Seite erzeugt die Relationen der Bialgebra $\mathcal{A}^{\mathrm{op,cop}}$. Analog zeigt man die Verträglichkeit mit der Determinantenbedingung. Schließlich gilt $(f \otimes f)\Delta u^a_b = v^{x'}_{a'} \otimes v^{b'}_{x'} = \Delta v^{b'}_{a'} = \Delta(f(u^a_b))$ und $\varepsilon(f(u^a_b)) = \delta_{ab} = \varepsilon(u^a_b)$. Somit ist $f$ ein Homomorphismus von Bialgebren. Da

sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op,cop}}$ Hopfalgebren sind, ist $f$ ein Hopfalgebren-Homomorphismus. Da der Antipode eine Hopfalgebren-Abbildung von $\mathcal{A}^{\mathrm{op,cop}}$ nach $\mathcal{A}$ ist, definiert $F = S\circ f$ einen Hopfalgebra-Automorphismus. Sein Inverses $F^{-1}$ ist gegeben durch $F^{-1}(u^a_b) = S^{-1}(u^{b'}_{a'})$.
Wir zeigen die zweite Behauptung. Dazu identifizieren wir $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$ mit der zugehörigen Partition, etwa $\lambda \vdash k$. Es sei $p_\lambda \in H_k(q)$ ein zu $\lambda$ gehöriges primitives Idempotent und $P^\lambda := \varrho(p_\lambda) \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes k})$, so dass $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda) = \langle (P^\lambda)^{\vec{n}}_{\vec{x}}\, u^{\vec{x}}_{\vec{m}} \,|\, \vec{n}, \vec{m} \in \{1,\dots,N\}^k\rangle$. Für einen Multiindex $\vec{x} = (x_1,\dots,x_k)$ setzen wir $\vec{x}\,' = (x_1',\dots,x_k')$ und $\overleftarrow{x}' = (x_k',\dots,x_1')$. Wir zeigen, dass sich die Matrixelemente der Darstellungen $\varrho$ und $\varrho_{\mathsf{c}}$ folgendermaßen ineinander umrechnen. Für alle $h \in H_k(q)$ gilt:

$$\varrho(h)^{\vec{n}}_{\vec{m}} = \varrho_{\mathsf{c}}(h)^{\vec{n}'}_{\vec{m}'}. \tag{3.50}$$

Dies zeigt man mit vollständiger Induktion über $k$. Offenbar gilt die obige Relation für alle $h \in H_2(q)$, denn es ist nach Definition von $\check{R}$ und (3.49)

$$\varrho_{\mathsf{c}}(T_1)^{a'b'}_{r's'} = \check{R}^{a'b'}_{r's'} = \hat{R}^{s'r'}_{b'a'} = \hat{R}^{ab}_{rs} = \varrho(T_1)^{ab}_{rs}.$$

Für $1 \in H_2(q)$ ist die Bedingung trivial. Für den Induktionsschluss von $k-1$ auf $k$ benutzt man, dass es für alle $h \in H_k(q)$ Elemente $x, y \in H_2(q)$ und $g \in H_{k-1}(q)$ derart gibt, dass sich $h$ als Linearkombination von Elementen der Form $x_{k-1,k}\, g\, y_{k-1,k}$ schreiben lässt. Damit ist (3.50) gezeigt. Wegen (3.47) und (3.50) gilt

$$(Q_\lambda)^{\overleftarrow{x}'}_{\overleftarrow{n}'} := \varrho(\beta_k(\alpha_k(p_\lambda)))^{\overleftarrow{x}'}_{\overleftarrow{n}'} = \varrho_{\mathsf{c}}(p_\lambda)^{\vec{n}'}_{\vec{x}'} = \varrho(p_\lambda)^{\vec{n}}_{\vec{x}} = (P_\lambda)^{\vec{n}}_{\vec{x}}. \tag{3.51}$$

Da nach Lemma 3.18 die Involutionen $\beta_k$ und $\alpha_k$ primitive Idempotente in äquivalente primitive Idempotente überführen, sind auch $P_\lambda$ und $Q_\lambda$ äquivalent und definieren daher nach Lemma 3.25 äquivalente Unterkodarstellungen. Ihre Charaktere stimmen überein. Wir erhalten daher:

$$\chi_{F(\boldsymbol{u}^\lambda)} = F(\chi_{\boldsymbol{u}^\lambda}) = (P_\lambda)^{\vec{n}}_{\vec{x}}(u^{\mathsf{c}})^{\vec{x}'}_{\vec{n}'} = (Q_\lambda)^{\overleftarrow{x}'}_{\overleftarrow{n}'} S(u^{\overleftarrow{n}'}_{\overleftarrow{x}'}) = S(\chi_{\boldsymbol{u}^\lambda}) = \chi_{(\boldsymbol{u}^\lambda)^{\mathsf{c}}}.$$

In der dritten Gleichung benutzten wir (3.51). Da $\mathcal{A}$ kohalbeinfach ist, folgt aus der Gleichheit der Charaktere die Behauptung. ■

## 3.5 Beweis von Theorem 3.11 und Theorem 3.12 (i)

### 3.5.1 Der Rang des Antisymmetrisators im Falle der A-Serie

In diesem Abschnitt bestimmen wir den Rang von Woronowicz' Antisymmetrisator $A_k\colon \Gamma^{\otimes k} \to \Gamma^{\otimes k}$ zu $\Gamma = \Gamma_{+,z}$. Für den Kalkül $\Gamma_{-,z}$ erhält man die entsprechende Aussage über Satz 4.14. Ausgehend von Satz 3.19 identifizieren wir nach Anwendung der Darstellung $\varrho \otimes \varrho_{\mathsf{c}}$ auf die Algebra $\mathcal{H}_k(q)$ den Antisymmetrisator $\boldsymbol{a}_k$ mit Woronowicz' Antisymmetrisator $A_k$. Wir verwenden die Kodarstellungstheorie von $\mathcal{A}$, um die Dimension der einzelnen Eigenräume von

$A_k$ zu berechnen. Es sei nun $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$. Da $q$ transzendent ist, ist $\mathcal{A}$ kohalbeinfach, vgl. [62, Theorem 11.22, S. 410].
Nach Folgerung 3.27 sind die Kodarstellungen $(\boldsymbol{u}^{\otimes k}(P_\lambda))^{\mathsf{c}}$ und $(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(P_\lambda^{\mathsf{c}})$ zueinander äquivalent, dabei sind $P_\lambda = \varrho(p_\lambda)$ und $P_\lambda^{\mathsf{c}} = \varrho_{\mathsf{c}}(p_\lambda)$ die Darstellungen eines primitiven Idempotents zur Partition $\lambda$. Da für transzendente Deformationsparameter $q$ die Kodarstellungstheorie von $\mathcal{A}$ mit der Darstellungstheorie der entsprechenden klassischen Lie-Gruppe übereinstimmt, erhalten wir insbesondere für den Rang $\delta_\lambda(N)$ von $\boldsymbol{u}^\lambda$ den bekannten Wert

$$\delta_\lambda(N) = \operatorname{rg} \boldsymbol{u}^\lambda = \operatorname{rg}(\boldsymbol{u}^\lambda)^{\mathsf{c}} = s_\lambda(1,\dots,1) = h(\lambda)^{-1} \prod_{(i,j)\in\lambda} (N+j-i), \tag{3.52}$$

wobei $s_\lambda$ die Schurfunktion von $N$ Argumenten ist, siehe etwa [67, I.3 Example 4, S. 45].
Wir betrachten nun die Darstellung $\varrho_+$ von $\mathcal{H}_k(q)$ im Raum $V^{\otimes 2k}$, wobei $\varrho_+ = \varrho \otimes \varrho_{\mathsf{c}}$ ist. Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts schreiben wir kurz $\boldsymbol{w}^\lambda$ für die Einschränkung $(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}(\varrho_{\mathsf{c}}(p_\lambda))$ der Kodarstellung $(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$ auf den vom Idempotent $\varrho_{\mathsf{c}}(p_\lambda)$ erzeugten Unterraum von $V^{\otimes k}$. Nach Folgerung 3.27 gilt

$$(\boldsymbol{u}^\lambda)^{\mathsf{c}} \cong \boldsymbol{w}^\lambda. \tag{3.53}$$

Mit Hilfe des folgenden Satzes lässt sich der Rang des Antisymmetrisators $a_k = \varrho_+(\boldsymbol{a}_k)$ ermitteln.

**Satz 3.31** *Es sei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\otimes k} \otimes (\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$. Dann definiert das Idempotent $\Pi_\lambda^+ = \varrho_+(\pi_\lambda)$ eine Unterkodarstellung $\boldsymbol{v}(\Pi_\lambda^+)$ von $\boldsymbol{v}$, für die gilt*

$$\boldsymbol{v}(\Pi_\lambda^+) \cong \boldsymbol{u}^\lambda \otimes \boldsymbol{w}^{\lambda'}. \tag{3.54}$$

**Bemerkung 3.9** Da $\pi_\lambda$ ein Unteridempotent von $z_\lambda \otimes z_{\lambda'}$ ist, ist klar, dass $\Pi_\lambda^+$ ein Unteridempotent von $\varrho(z_\lambda) \otimes \varrho_{\mathsf{c}}(z_{\lambda'})$ ist. Die Einschränkung der Kodarstellung $\boldsymbol{v}$ auf dieses Idempotent liefert eine Kodarstellung, die gleich $d_\lambda^2\, \boldsymbol{u}^\lambda \otimes \boldsymbol{w}^{\lambda'}$ ist. Dabei ist $d_\lambda^2$ die Vielfachheit. Das Interessante am obigen Satz ist, dass genau eine der Komponenten $\boldsymbol{u}^\lambda \otimes \boldsymbol{w}^{\lambda'}$ in $\Pi_\lambda^+$ auftritt und zwar vollständig. Denkbar wäre ja, dass nach Aufspalten dieses Tensorproduktes der Projektor $\Pi_\lambda^+$ nur gewisse irreduzible Teile von $\boldsymbol{u}^\lambda \otimes \boldsymbol{w}^{\lambda'}$ enthält, aber nicht alle. Dieser Fall tritt nicht ein. □

*Beweis.* (a) Zunächst berechnen wir den Rang von $\Pi_\lambda^+$ in $V^{\otimes 2k}$, d. h. die Dimension der Kodarstellung $\boldsymbol{v}(\Pi_\lambda^\tau)$. Dazu benutzen wir das in Satz 3.15 eingeführte Spurfunktional Tr auf $H_k(q)$. Mit $\mathrm{Tr}_1$ bezeichnen wir das Bild von Tr unter der Einsetzungsabbildung $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$. Wendet man diese Einsetzung auf Gleichung (3.30) an, beachtet die Unabhängigkeit von Tr von der Wahl der Darstellung $\varrho$ bzw. $\varrho_{\mathsf{c}}$ und ferner $\sum_{\mu\models k} E_\mu = I$, erhält man

$$\mathrm{Tr}_1(h) = \mathrm{tr}\ \varrho(h) = \mathrm{tr}\ \varrho_{\mathsf{c}}(h). \tag{3.55}$$

Nun sei $\pi \in \mathcal{H}_k(q)$ idempotent. Da der Rang eines Idempotents gleich seiner Spur ist, erhalten wir nach Gleichung (3.55), $\operatorname{rg} \varrho_+(\pi) = (\mathrm{Tr}_1 \otimes \mathrm{Tr}_1)\pi$. Insbesondere gilt für $\pi = \pi_\lambda$ wegen

(3.40) und (3.52):

$$\operatorname{rg} \varPi_\lambda^\tau = s_\lambda(1,\dots,1)s_{\lambda'}(1,\dots,1) = \delta_{\lambda'}(N)\delta_\lambda(N). \tag{3.56}$$

(b) Es sei $\{p_\lambda^{ij}\,|\,i,\,j = 1,\dots,d_\lambda\}$ eine lineare Basis des zweiseitigen Ideals $z_\lambda H_k(q)$ bestehend aus paarweise äquivalenten Idempotenten. Nach Lemma 3.18 ist dann die Menge $\{\iota_k(p_\lambda^{ij})\,|\,i,\,j = 1,\dots,d_\lambda\}$ eine Basis von $z_{\lambda'}H_k(q)$. Wegen (3.39) ist $\pi_\lambda$ ein Unteridempotent von $z_{\lambda'} \otimes z_\lambda$. Folglich existieren komplexe Zahlen $\alpha_{mnrs}^\lambda$, $m,n,r,s = 1,\dots,d_\lambda$, mit $\pi_\lambda = \sum \alpha_{mnrs}^\lambda p_\lambda^{mn}\otimes\iota_k(p_\lambda^{rs})$. Außerdem sind die Idempotente $p_\lambda^{mn} \otimes \iota_k(p_\lambda^{rs})$ paarweise äquivalent in $\mathcal{H}_k(q)$. Wendet man die Darstellung $\varrho_+$ an, so hat man $\varPi_\lambda^+ = \sum \alpha_{mnrs}^\lambda \varrho(p_\lambda^{mn})\otimes\varrho_{\mathsf{c}}(\iota_k(p_\lambda^{rs}))$. Man prüft leicht nach, dass $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\otimes k}\otimes(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$, $P = \varPi_\lambda^+$ und $P_i = \varrho(p_\lambda^{mn})\otimes\varrho_{\mathsf{c}}(\iota_k(p_\lambda^{rs}))$, $i = (mnrs)$ die Voraussetzungen von Lemma 3.25 (iii) erfüllen. Folglich gilt

$$\boldsymbol{v}(\varPi_\lambda^+) \cong \alpha^\lambda\, \boldsymbol{u}^\lambda\otimes\boldsymbol{w}^{\lambda'}, \quad \text{wobei} \quad \alpha^\lambda = \sum \alpha_{mnrs}^\lambda$$

eine nichtnegative rationale Zahl ist. Insbesondere gilt wegen (3.52), dass $\dim(\boldsymbol{v}(\varPi_\lambda^+)) = \alpha^\lambda\,\delta_\lambda(N)\delta_{\lambda'}(N)$. Vergleicht man dies mit (3.56), so sieht man $\alpha^\lambda = 1$. Der Beweis ist damit vollständig. ∎

Ein wichtiger Schritt beim Studium der linksinvarianten und biinvarianten Algebren ${}_{\mathrm{W}}\varGamma_{\mathrm{L}}^\wedge$ bzw. ${}_{\mathrm{W}}\varGamma_{\mathrm{Inv}}^\wedge$ besteht darin, den Antisymmetrisator $A_k$ von $\varGamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$ auf den Antisymmetrisator $a_k = \varrho_+(\boldsymbol{a}_k)$ von $\varrho_+(\mathcal{H}_k(q))$ zurückzuführen. Wir geben dazu einen Isomorphismus $J^{(k)}$ von rechten Komoduln $\boldsymbol{u}^{\otimes k}\otimes(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$ und $\varDelta_{\mathrm{R}}\restriction\varGamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$ an, der den Antisymmetrisator $a_k$ in den Antisymmetrisator $A_k$ abbildet. Der folgende Satz stellt also die Verbindung zwischen den Sätzen über die abstrakte Algebra $\mathcal{H}_k(q)$ und die von der Zopfung $\sigma$ erzeugte Algebra her.

**Satz 3.32** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$, $\varGamma = \varGamma_{+,z}$ und $k \geq 1$. Wir setzen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\otimes k}\otimes(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k}$.*
(i) *Es gibt einen Isomorphismus $J^{(k)}$ von rechten Komoduln $\boldsymbol{v}$ und $\varDelta_{\mathrm{R}}\restriction\varGamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$ derart, dass*

$$J^{(k)}a_k = A_k J^{(k)}. \tag{3.57}$$

(ii) *Es existiert ein Isomorphismus $J^{\wedge k}$ von rechten Komoduln $\boldsymbol{v}\restriction \operatorname{im} a_k$ und $\varDelta_{\mathrm{R}}\restriction{}_{\mathrm{W}}\varGamma_{\mathrm{L}}^{\wedge k}$.*
(iii) *Es gibt einen Isomorphismus von ${}_{\mathrm{W}}\varGamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge k}$ und dem Vektorraum $(\operatorname{im} a_k)^{\boldsymbol{v}}$ der $\boldsymbol{v}$-invarianten Elemente von $\operatorname{im} a_k$.*

*Beweis.* Wir schreiben $W_n$ anstelle von $W_{n,n+1}$ für eine lineare Abbildung $W \in \operatorname{End}(V\otimes V)$, die an den Stellen $n$ und $n+1$ des Tensorproduktes $V^{\otimes k}$ mit $n \leq k-1$ wirkt.
(i) Es seien

$$\{e_{\vec{\imath}}\,|\,\vec{\imath} = (i_1,\dots,i_{2k}),\, i_j\in\{1,\dots,N\}\}, \quad \{\theta_{i_1 i_2}\otimes_{\mathcal{A}}\cdots\otimes_{\mathcal{A}}\theta_{i_{2k-1}i_{2k}}\,|\,i_j \in \{1,\dots,N\}\}$$

die kanonischen Vektorraumbasen von $V^{\otimes 2k}$ bzw. $\varGamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$. Bezüglich dieser Basen definieren wir die Matrix $J^{(k)}$ wie folgt. Es sei $J^{(1)} = I$ und für $k \geq 2$.

$$J^{(k)}_{2\cdots 2k-1} = \grave{R}^-_{2k-2}(\grave{R}^-_{2k-4}\grave{R}^-_{2k-3})\cdots(\grave{R}^-_{2i}\cdots\grave{R}^-_{k+i-1})\cdots(\grave{R}^-_{2}\cdots\grave{R}^-_{k}). \tag{3.58}$$

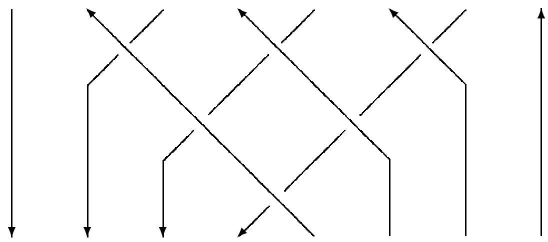
$J^{(4)} =$ 

Abbildung 3.1: Die graphische Darstellung von $J^{(4)}$.

Die Indizes $(2, \ldots, 2k-1)$ geben an, dass $J^{(k)}$ nur an den Stellen $2, \ldots, 2k-1$ wirkt und die erste und letzte Komponente unverändert lässt. Offenbar ist $J^{(k)}$ invertierbar, da $\grave{R}^-$ invertierbar ist. Man überprüft unschwer, dass die folgenden beiden Rekursionsbeziehungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} J^{(k)} &= J^{(k-1)}_{2\cdots 2k-3} \grave{R}^-_{2k-2} \cdots \grave{R}^-_k\,, \\ J^{(k)} &= J^{(k-1)}_{4\cdots 2k-1} \grave{R}^-_2 \cdots \grave{R}^-_k\,. \end{aligned}$$

Benutzt man eine der obigen Rekursionen, so kann man mit vollständiger Induktion über $k$ zeigen, dass $J^{(k)}$ einen Isomorphismus der Kodarstellungen $\boldsymbol{u}^{\otimes k} \otimes (\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}$ und $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}$ definiert. Da $\Delta_{\mathrm{R}} \restriction \Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k} \cong (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}$ nach Definition von $\Delta_{\mathrm{R}}$, ist der erste Teil von (i) gezeigt. Wir zeigen die Gültigkeit von (3.57). Da beide Antisymmetrisatoren $a_k$ und $A_k$ homomorphe Bilder des Antisymmetrisators $\boldsymbol{A}_k$ der Zopfgruppenalgebra sind, genügt es zu zeigen, dass die entsprechenden Bilder von $b_n$ ineinander überführt werden, genauer, es genügt zu zeigen, dass

$$J^{(k)} \varrho_+(T_n \otimes T_n^{-1}) = \sigma_n J^{(k)} \quad \text{für} \quad n = 1, \ldots, k-1.$$

Wegen (2.49) ist die dazu äquivalente Matrixschreibweise

$$J^{(k)} \hat{R}_n \check{R}^{-1}_{k+n} = \grave{R}^-_{2n} \hat{R}_{2n-1} \check{R}^{-1}_{2n+1} \acute{R}_{2n} J^{(k)}. \tag{3.59}$$

Wir wollen (3.59) durch vollständige Induktion über $k$ beweisen. Wegen $J^{(2)} = \grave{R}^-_2$ ist sie für $k = 2$ und $n = 1$ offenbar.

*Fall 1:* $n = 1$. Aufgrund der ersten Rekursionsgleichung, (A.3), $k \geq 3$, und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} J^{(k)} \hat{R}_1 \check{R}^{-1}_{k+1} &= J^{(k-1)}_{2\cdots 2k-3} \grave{R}^-_{2k-2} \cdots \grave{R}^-_{k+2} \grave{R}^-_{k+1} \grave{R}^-_k \hat{R}_1 \check{R}^{-1}_{k+1} \\ &= J^{(k-1)}_{2\cdots 2k-3} \hat{R}_1 \grave{R}^-_{2k-2} \cdots \grave{R}^-_{k+2} \grave{R}^-_{k+1} \grave{R}^-_k \check{R}^{-1}_{k+1} \\ &= J^{(k-1)}_{2\cdots 2k-3} \hat{R}_1 \check{R}_k^{-1} \hat{R}^k \grave{R}^-_{2k-2} \cdots \grave{R}^-_k \\ &= \grave{R}^-_2 \hat{R}_1 \check{R}_3^{-1} \acute{R}_2 J^{(k-1)}_{2\cdots 2k-3} \grave{R}^-_{2k-2} \cdots \grave{R}^-_k \\ &= \grave{R}^-_2 \hat{R}_1 \check{R}_3^{-1} \acute{R}_2 J^{(k)}_+. \end{aligned}$$

*Fall 2:* $2 \leq n \leq k-1$. Wegen der zweiten Rekursionsgleichung, (A.3) und $k \geq 3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} J^{(k)} \hat{R}_n \check{R}_{k+n}^{-1} &= J_{4\cdots 2k-1}^{(k-1)} \grave{R}_2^- \cdots \grave{R}_k^- \hat{R}_n \check{R}_{k+n}^{-1} \\ &= J_{4\cdots 2k-1}^{(k-1)} \check{R}_{k+n}^{-1} \grave{R}_2^- \cdots \grave{R}_n^- \grave{R}_{n+1}^- \hat{R}_n \grave{R}_{n+2}^- \cdots \grave{R}_k^- \\ &= J_{4\cdots 2k-1}^{(k-1)} \hat{R}_{n+1} \check{R}_{k+n}^{-1} \grave{R}_2^- \cdots \grave{R}_k^- \\ &= \grave{R}_{2n}^- \hat{R}_{2n-1} \check{R}_{2n+1}^{-1} \acute{R}_{2n} J_{4\cdots 2k-1}^{(k-1)} \grave{R}_2^- \cdots \grave{R}_k^- \\ &= \grave{R}_{2n}^- \hat{R}_{2n-1} \check{R}_{2n+1}^{-1} \acute{R}_{2n} J^{(k)}. \end{aligned}$$

Dabei benutzten wir in der vierten Gleichung die um zwei Positionen nach rechts verschobene Induktionsvoraussetzung (für $k-1$ und $n-1$):

$$J_{4\ldots 2k-1}^{(k-1)} \hat{R}_{n+1} \check{R}_{k+n}^{-1} = \grave{R}_{2n}^- \hat{R}_{2n-1} \check{R}_{2n+1}^{-1} \acute{R}_{2n} J_{4\ldots 2k-1}^{(k-1)}.$$

Damit ist der Beweis von (i) erbracht.
(ii) Nach (i) ist die Abbildung $J^{(k)} \colon V^{\otimes 2k} \to \Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$ ein linearer Isomorphismus, der die Kerne der Abbildungen $a_k$ und $A_k$ bijektiv aufeinander abbildet. Daher kann $J^{(k)}$ faktorisiert werden zu einem Isomorphismus von $V^{\otimes 2k} / \ker a_k$ auf $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k} / \ker A_k$. Da auch das Bild $\operatorname{im} a_k$ $\boldsymbol{v}$-invariant ist und da $\operatorname{im} a_k \cong V^{\otimes 2k} / \ker a_k$, ist auch die Abbildung $J^{\wedge k} \colon \operatorname{im} a_k \to {}_{\mathrm{W}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge k}$ ein Isomorphismus von rechten Komoduln.
(iii) Da $\mathcal{A}$ halbeinfach ist und $J^{\wedge k}$ ein Isomorphismus von rechten Komoduln, ist $J^{\wedge k}$ die direkte Summe der Isomorphismen der isotypischen Komponenten von $\operatorname{im} a_k$ bzw. ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}$. Insbesondere werden die trivialen Komponenten, d. h. die zur Kodarstellung **1** gehörigen Komponenten, bijektiv aufeinander abgebildet. Somit ist die Einschränkung von $J^{\wedge k}$ auf den Raum der invarianten Elemente von $\operatorname{im} a_k$ ein Isomorphismus auf ${}_{\mathrm{W}}\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge k}$. ■

**Bemerkung 3.10** Identifiziert man Projektoren $P \in \operatorname{Mor}(\boldsymbol{v})$ mit ihrem zugehörigen Teilraum, so liefert $J^{(k)}$ vermöge $J^{(k)} P (J^{(k)})^{-1}$ einen $\Delta_{\mathrm{R}}$-invarianten Teilraum von $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes k}$. □

### 3.5.2 Abschluss der Beweise

Zunächst zeigen wir die folgende kombinatorische Identität:

$$\sum_{\lambda \vdash k} \delta_{\lambda'}(N) \delta_\lambda(N) = \binom{N^2}{k}, \tag{3.60}$$

wobei $N$ und $k$ nichtnegative ganze Zahlen sind.
Wir benutzen dazu die Formel [67, (4.3′), I. 4, S. 65]: $\prod (1 + x_i y_j) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y)$. Diese schränken wir auf die endliche Variablenmenge $x_1, \ldots, x_N$ und $y_1, \ldots, y_N$ ein und betrachten die natürliche Bigraduierung der Polynome in diesen Variablen. Schränkt man die Formel weiter ein auf die homogenen Komponenten vom Grad $(k, k)$ und setzt dann $x_1 = \cdots = x_N = y_1 = \cdots = y_N = 1$ ein, so erhält man mit (3.52) die Gleichung (3.60). Wegen (3.56) und Satz 3.32 (ii) erhalten wir schließlich

$$\dim {}_{\mathrm{W}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge k} = \sum_{\lambda \vdash k} \operatorname{rg} \Pi_\lambda^\tau = \sum_{\lambda \vdash k} \delta_{\lambda'}(N) \delta_\lambda(N) = \binom{N^2}{k}.$$

Insbesondere ist die einzige Partition $\lambda$ von $N^2$ mit $\operatorname{rg} \Pi^\tau_\lambda \neq 0$ die Partition $\lambda = (N^N)$. In diesem Fall ist $\lambda = \lambda'$ symmetrisch. Nach der obigen Formel ist $\dim {}_{\mathrm{W}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge N^2} = 1$, und damit existiert genau eine höchste Form vom Grade $N^2$. Der Beweis von Theorem 3.11 ist abgeschlossen.

Zum Beweis von Theorem 3.12 (i) betrachten wir die formale Potenzreihe

$$p(t) = (1+t)(1+t^3)(1+t^5)\cdots = 1 + \sum_{i\geq 1} c_i\, t^i.$$

Dann ist $c_k = \operatorname{Card}\{\lambda \mid \lambda \vdash k,\ \lambda = \lambda'\}$. Dies stammt von der bekannten Bijektion zwischen den symmetrischen Partitionen und den ungeraden Partitionen mit paarweise verschiedenen Summanden, vgl. [12, S. 184 oben]. Betrachtet man nur einen endlichen Abschnitt der obigen Reihe, so ergibt sich, dass das Polynom

$$s(t) = (1+t)(1+t^3)\cdots(1+t^{2N-1}) = 1 + b_1 t + \cdots + b_{N^2} t^{N^2}$$

die Koeffizienten $b_k = \operatorname{Card}\{\lambda \mid \lambda \vdash k, \lambda = \lambda', \lambda'_1 \leq N\}$ hat.

Wegen (3.56) und (3.52) ist $\operatorname{im} \Pi^\tau_\lambda = 0$, falls $\lambda'_1 > N$. Es genügt daher, die Elemente der Menge $\mathcal{P}_k := \{\lambda \mid \lambda \vdash k,\ \lambda'_1 \leq N\}$ zu betrachten. Dann ist $\boldsymbol{u}^\lambda$ von Null verschieden nach Satz 3.28 (ii). Wir erwähnen einen einfachen Fakt aus der Kodarstellungstheorie: Es sei $W$ der Vektorraum, auf dem die Kodarstellung $\boldsymbol{w}$ wirkt. Dann ist der Raum $W^{\boldsymbol{w}}$ der unter $\boldsymbol{w}$ invarianten Elemente isomorph zu $\operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{w})$. Ferner gilt nach Lemma 3.23 $\operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) \cong \operatorname{Mor}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{w})$, und außerdem ist $\boldsymbol{v} \cong \boldsymbol{v}^{\mathrm{cc}}$.

Wegen Satz 3.32 (iii), (3.54) und (3.53) gilt für $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\otimes k} \otimes (\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}$ und $\boldsymbol{w}^\lambda = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}(\varrho_{\mathrm{c}}(p_\lambda))$

$$\begin{aligned}
\dim({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}) &= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim(\operatorname{im} \Pi^+_\lambda)^{\boldsymbol{v}} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim \operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v}(\Pi^+_\lambda)) && (3.61)\\
&= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim \operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{w}^{\lambda'} \otimes \boldsymbol{u}^\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim \operatorname{Mor}((\boldsymbol{w}^{\lambda'})^{\mathrm{c}}, \boldsymbol{u}^\lambda)\\
&= \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim \operatorname{Mor}((\boldsymbol{u}^{\lambda'})^{\mathrm{cc}}, \boldsymbol{u}^\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \dim \operatorname{Mor}(\boldsymbol{u}^{\lambda'}, \boldsymbol{u}^\lambda) && (3.62)\\
&= \operatorname{Card}\{\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_k,\ \boldsymbol{u}^\lambda \cong \boldsymbol{u}^{\lambda'}\} = \operatorname{Card}\{\lambda \mid \lambda\in\mathcal{P}_k, \lambda = \lambda'\}.
\end{aligned}$$

Bei den letzten beiden Schritten benutzten wir das Schursche Lemma sowie Folgerung 3.29. Dies liefert genau den Koeffizienten $b_k$ des Polynoms $s(t)$. Der Beweis für die Kalküle $\Gamma = \Gamma_{-,z}$ folgt wieder mit Satz 4.14 (i) mit $\lambda = \mu = (0)$. Dies vollendet den Beweis von Theorem 3.12 (i).

**Lemma 3.33** *Für* $\rho \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ *gilt*

$$\sigma_{w_\circ}(\rho) = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}\rho \quad \textit{und} \quad S(\rho) = (-1)^k \rho. \tag{3.63}$$

*Beweis*. Da nach (3.61) die Räume ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ und $\bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_k} \operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v}(\Pi^+_\lambda))$ als lineare Räume isomorph sind, entsprechen die biinvarianten $k$-Formen zur Partition $\lambda$ mit $\lambda = \lambda'$, eineindeutig den Unteridempotenten $\pi$ von $\Pi^+_\lambda$. Jeder einzelne Raum $\operatorname{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{v}(\Pi^+_\lambda))$ ist nach (3.62) eindimensional, falls $\lambda = \lambda'$ und sonst nulldimensional. Da $\ell(w_\circ) = \frac{1}{2}k(k-1)$, folgt die erste Behauptung aus Lemma 3.20. Zusammen mit Satz 3.3 folgt die zweite Behauptung. ∎

Nun können wir auch den Beweis von Theorem 3.12 (ii), (iii) und (iv) abschließen. Mit (3.63) und (3.1) erhalten wir für $\rho_k \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ und $\rho_n \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge n}_{\mathrm{Inv}}$

$$\begin{aligned}\rho_k \wedge \rho_n &= (-1)^{k+n} S(\rho_k \wedge \rho_n)\\ &= (-1)^{k+n+kn} S(\rho_n) \wedge S(\rho_k)\\ &= (-1)^{k+n+kn+k+n} \rho_n \wedge \rho_k\\ &= (-1)^{kn} \rho_n \wedge \rho_k.\end{aligned}$$

Es sei $\rho \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$. Da das Differential $\mathrm{d}$ mit dem Antipoden $S$ kommutiert, den Grad der Form um Eins erhöht und biinvariante Elemente in ebensolche abbildet, erhalten wir mit (3.63)

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\big((-1)^k S(\rho)\big) = (-1)^k S(\mathrm{d}\rho) = (-1)^k (-1)^{k+1} \mathrm{d}\rho = -\mathrm{d}\rho.$$

Folglich ist $\mathrm{d}\rho = 0$. Da $\mathrm{d}$ linear ist, ist somit jede biinvariante Form geschlossen.
Angenommen $\rho_1, \rho_2 \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$ repräsentieren dieselbe de-Rham-Kohomologieklasse. Dann gibt es $\rho \in {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k-1}_{\mathrm{Inv}}$ mit $\rho_1 - \rho_2 = \mathrm{d}\rho$. Da $\mathrm{d}$ mit der rechten Kowirkung auf ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k-1}$ und auf ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k}$ vertauscht, ist das Urbild $W = \mathrm{d}^{-1}(\mathrm{d}\rho)$ auch ein $\Delta_{\mathrm{R}}$-invarianter Teilraum von ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k-1}_{\mathrm{L}}$. Da $\Delta_{\mathrm{R}}\lceil\langle \mathrm{d}\rho\rangle$ isomorph zur trivialen Kodarstellung **1** ist, folgt aus dem Schurschen Lemma, dass $\Delta_{\mathrm{R}}\lceil W$ ein Vielfaches der trivialen Kodarstellung ist. Daher ist also $W \subseteq {}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge k-1}_{\mathrm{Inv}}$ und $\mathrm{d}\rho = 0$. Folglich ist $\rho_1 = \rho_2$ und der Beweis von Theorem 3.12 ist fertig.

## 3.6 Beweis von Theorem 3.13 und Theorem 3.14

Wir wenden uns dem Beweis von Theorem 3.13 zu und betrachten für den Beweis von Teil (i) quadratische Algebren. Manin entwickelte in [75, Abschnitt 3] eine Theorie der quadratischen Algebren, studierte Operationen auf ihnen und untersuchte ihre Eigenschaften. Eine *quadratische Algebra* ist eine $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra $B = \bigoplus_{i\geq 0} B_i$ mit $B_0 = \mathbb{C}$, $B_1$ erzeugt $B$ als Algebra und alle erzeugenden Relationen $\mathrm{Rel}(B)$ sind (homogen) zweiten Grades. Das heißt, $\mathrm{Rel}(B) \subseteq B_1 \otimes B_1$ und $B = B_1^{\otimes}/(\mathrm{Rel}(B))$. Die *duale* quadratische Algebra zu $B$ ist definiert als $B^! = (B_1^*)^{\otimes}/(\mathrm{Rel}(B)^{\perp})$, wobei $\mathrm{Rel}(B)^{\perp} = \{t \in B_1^* \otimes B_1^* \,|\, t(r) = 0 \text{ für alle } r \in \mathrm{Rel}(B)\}$ den zu $\mathrm{Rel}(B)$ orthogonalen Teilraum bezeichnet.

**Beispiel 3.1** Es seien $q \in \mathbb{C}^{\times}$, $V = \langle e_1, e_2\rangle$ ein zweidimensionaler Vektorraum und $R = \langle e_1 \otimes e_2 - q\, e_2 \otimes e_1\rangle \subseteq V \otimes V$. Dann ist $A = V^{\otimes}/(R)$ isomorph zur Koordinatenalgebra auf der Quantenebene $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_q)$. Es sei $\{e^1, e^2\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, e_2\}$. Man rechnet leicht nach, dass dann $R^{\perp} = \langle e^1 \otimes e^1,\, e^2 \otimes e^2,\, e^1 \otimes e^2 + q^{-1} e^2 \otimes e^1\rangle$, und $A^!$ ist isomorph zur äußeren Algebra $\Lambda^{\wedge}(\mathbb{C}^2_q)$.

**Satz 3.34** *Es sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebren $\mathcal{O}(G_q)$ zu einer der Quantengruppen* $\mathrm{GL}_q(N)$, $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{O}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ *bzw.* $\mathrm{Sp}_q(N)$ *und $\Gamma = \Gamma_{+,z}$. Dann ist die Algebra ${}_{\mathrm{S}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}$ eine quadratische Algebra. Sie ist dual zur Spiegelungsgleichungsalgebra* (2.17)

$$B(\hat{R}) := \mathbb{C}\langle L^i_j \,|\, i, j = 1, \ldots, N\rangle/(L_1\, \hat{R}\, L_1\, \hat{R} - \hat{R}\, L_1 \hat{R}\, L_1).$$

*Beweis*. Nach Definition ist ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge} = \Gamma_{\mathrm{L}}{}^{\otimes}/(\ker(I-\sigma))$ also wegen $\ker(I-\sigma) \subseteq \Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}$ eine quadratische Algebra. Es sei $T\colon V \otimes V \to V \otimes V$ eine lineare Abbildung. Wegen $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^{\mathsf{t}}$ ist die duale quadratische Algebra zu $V^{\otimes}/(\ker T)$ gleich $(V^*)^{\otimes}/(\operatorname{im} T^{\mathsf{t}})$. Somit erhalten wir den Relationenraum von $({}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge})^!$ als Bild von $(I-\sigma)^{\mathsf{t}}$. Es sei $\{L^i_j \mid i,\, j = 1,\dots,N\}$ die Dualbasis zu $\{\omega^+_{ij} \mid i,\, j = 1,\dots,N\}$. Durch Weglassen des Tensorzeichens identifizieren wir die Tensoralgebra über $\Gamma_{\mathrm{L}}{}^*$ mit der von $\{L^i_j \mid i,\, j = 1,\dots,N\}$ frei erzeugten assoziativen Algebra. Wir berechnen den Relationenraum $\operatorname{im}(I-\sigma)^{\mathsf{t}}$ und verwenden die Matrixdarstellung (2.49) in der entsprechend transponierten Form sowie die definierenden Gleichungen (2.48) für $\check{R}$ und $\acute{R}$:

$$\begin{aligned} L_{ijkl} &:= (I-\sigma)^{\mathsf{t}}(L^i_j \otimes L^k_l) \\ &= L^i_j \otimes L^k_l - \grave{R}^{-jk}_{ty} \hat{R}^{it}_{mx} (\hat{R}^{-1})^{sz}_{ly} \hat{R}^{nx}_{rz} L^m_n \otimes L^r_s \\ &= L^i_j L^k_l - \grave{R}^{-jk}_{ty} (\hat{R}\, L_1\, \hat{R}\, L_1\, \hat{R}^{-1})^{it}_{ly}. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\acute{R}^{ab}_{jk}$, summiert über $j, k$ und beachtet (A.2), dann erhält man

$$\acute{R}^{ab}_{jk} L_{ijkl} = (L_1\, \hat{R}\, L_1 - \hat{R}\, L_1\, \hat{R}\, L_1\, \hat{R}^{-1})^{it}_{ly}.$$

Multipliziert man die obige Gleichung von rechts mit $\hat{R}$, so sieht man, dass die Elemente $(L_1\, \hat{R}\, L_1\, \hat{R} - \hat{R}\, L_1\, \hat{R}\, L_1)^{it}_{ly}$ im Relationenraum liegen. Wegen der Invertierbarkeit von $\hat{R}$ und $\acute{R}$ spannen diese Elemente schon den ganzen Relationenraum $\operatorname{im}(I-\sigma)^{\mathsf{t}}$ auf. ∎

Majid [69, Theorem 7.4.1 und Theorem 10.3.1] hat gezeigt, dass der Vektorraum $\mathcal{A}(\hat{R})$ ein zweites Produkt trägt, bei dem $\mathcal{A}(\hat{R})$ isomorph zur Spiegelungsgleichungsalgebra $B(\hat{R})$ wird. Die Algebren $\mathcal{A}(\hat{R})$ und $B(\hat{R})$ sind als graduierte Vektorräume isomorph. Außerdem ist bekannt, dass die FRT-Bialgebra $\mathcal{A}(\hat{R})$ die Vektorraumbasis

$$\{(u^1_1)^{k_{11}} (u^1_2)^{k_{12}} \cdots (u^N_N)^{k_{NN}} \mid k_{11}, k_{12}, \dots, k_{NN} \in \mathbb{N}_0\}$$

besitzt, siehe [78, Theorem 3.5.1]. Folglich hat auch die Algebra $B(\hat{R})$ diese Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis. Wegen [82, Theorem 5.3] ist $B(R^{\tau})$ Koszulsch. Wegen [75, Proposition 7, Abschnitt 9] und Satz 3.34 können wir die Frobenius-Formel für quadratisch-duale Koszul-Algebren anwenden: $P({}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) P(B(R^{\tau}), -t) = 1$. Folglich gilt $P({}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) = (1+t)^{N^2}$. Beachtet man die Inklusion der die äußeren Algebren ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$ und ${}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}$ definierenden Ideale ${}_{\mathrm{s}}\mathfrak{J} \subseteq {}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J}$ und die Identität der Poincaré-Reihen $P({}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t) = P({}_{\mathrm{W}}\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{L}}, t)$, nach Theorem 3.11, dann hat man die Gleichheit der Ideale ${}_{\mathrm{s}}\mathfrak{J}$ und ${}_{\mathrm{W}}\mathfrak{J}$. Der Beweis von Theorem 3.13 (i) ist damit komplett.

### 3.6.1 Unter-Hopf-Bimoduln von $\Gamma^{\otimes 2}$

Wir wollen nun Lemma 2.15 anwenden und eine Klasse von Unter-Hopf-Bimoduln zum Hopf-Bimodul $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ mit $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ konstruieren.

Unser Ziel ist es, den von $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ erzeugten freien Linksmodul, der nach Lemma 2.15 und Lemma 3.5 sogar ein Unter-Hopf-Bimodul von $\Gamma^{\otimes 2}$ ist, abzuschätzen gegen den Unter-Hopf-Bimodul $\ker A_2$. Wegen der Universalitätseigenschaft von ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ ist klar, dass $\mathcal{S}(\mathcal{R}) \subseteq \ker A_2$.

Dies folgt aber auch direkt aus der Formel $(\omega \otimes \omega)\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}(a) = A_2(\mathcal{S}(a))$, $a \in \mathcal{A}$, siehe [62, Formel 14.30], und der $\mathrm{Ad}_{\mathrm{R}}$-Invarianz von $\mathcal{R}$, vgl. Lemma 2.17. Wir werden sehen, dass in den Fällen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$, $N \geq 3$ die beiden Unter-Hopf-Bimoduln zusammenfallen, während es in den Fällen $\mathrm{SL}_q(2)$, $\mathrm{O}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ und $\mathrm{Sp}_q(N)$ jeweils einen eindimensionalen Unter-Hopf-Bimodul gibt, der $\mathcal{A}\,\mathcal{S}(\mathcal{R})$ zu $\ker A_2$ ergänzt.

Die Methode zur Konstruktion von Unter-Hopf-Bimoduln lässt sich auch auf höhere Tensorprodukte $\Gamma^{\otimes k}$, $k \geq 2$ übertragen. Dies wurde in der Arbeit [46, S. 1356] benutzt.

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra zu einer der Quantengruppen $G_q$ der vier klassischen Serien und $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ einer der $N^2$-dimensionalen bikovarianten DKEO über $\mathcal{A}$. Die Gültigkeit der entsprechenden Sätze für die Hopf-Bimoduln $\Gamma_{-,z}$ folgt aus der Dualität von $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$, vergleiche Satz 4.14. Die Standardbasis des $\mathbb{C}^N$ sei $\{e_1, \ldots, e_N\}$. Für die Spektralprojektoren der $\hat{R}$-Matrix führen wir im Falle der A-Serie die Indexmenge $J = \{+, -\}$ und im Falle der B-, C-, und D-Serien die Indexmenge $J = \{+, -, 0\}$ ein.

**Lemma 3.35** *Es seien $\hat{P} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})$ und $\check{Q} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ idempotente Elemente. Die lineare Abbildung $\varphi\colon \Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}} \to (\mathbb{C}^N)^{\otimes 4}$, gegeben durch $\varphi(\omega^+_{ij} \otimes \omega^+_{kl}) = e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$, ist ein Isomorphismus von rechten Komoduln, $\varphi \in \mathrm{Mor}(\Delta_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$. Wir identifizieren die beiden Räume unter Weglassung von $\varphi$.*

(i) *Der freie Linksmodul*

$$\mathcal{A}\, \grave{R}^{-}_{23} \hat{P}_{12} \check{Q}_{34} \acute{R}_{23} (\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}}) \tag{3.64}$$

*ist ein Unter-Hopf-Bimodul von $\Gamma^{\otimes 2}$ der Dimension $\mathrm{rg}(\hat{P})\,\mathrm{rg}(\check{Q})$.*

(ii) *$\Gamma^{\otimes 2}$ ist die direkte Summe von $j^2$, $j := \mathrm{Card}(J)$ bikovarianten Unter-Hopf-Bimoduln $\Lambda^{\tau\nu}$, $\tau, \nu \in J$, die jeweils von den linksinvarianten Elementen*

$$\grave{R}^{-}_{23} \hat{P}^{\tau}_{12} \check{P}^{\nu}_{34} \acute{R}_{23} (\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}})$$

*als freie Linksmoduln erzeugt werden. Ferner gilt*

$$\ker A_2 = \bigoplus_{\nu \in J} \Lambda^{\nu\nu}$$

*als innere direkte Summe von Unter-Hopf-Bimoduln .*

*Beweis*. Wir verwenden im Beweis erstmals den graphischen Kalkül zum Rechnen mit Morphismen. Eine kurze Einführung in diesen Kalkül findet man im Anhang A. Dass $\varphi$ einen Isomorphismus von rechten Komoduln definiert, folgt aus der Definition (2.44) der rechten Kowirkung $\Delta_{\mathrm{R}}$ auf $\Gamma$ und aus deren Fortsetzung (2.21) auf $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$.

(i) Da alle vier in der Gleichung (3.64) auftretenden Teilabbildungen Morphismen von Kodarstellungen sind, prüft man leicht nach, dass $T := \grave{R}^{-}_{23} \hat{P}_{12} \check{Q}_{34} \acute{R}_{23}$ in $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ liegt. Folglich ist $T(\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}})$ invariant unter der rechten Kowirkung $\Delta_{\mathrm{R}}$.

Wir berechnen nun die rechtsadjungierte Wirkung auf den Elementen $\theta^{PQ}_{mnkl} := T(\omega^+_{mn} \otimes \omega^+_{kl})$.

Wegen (2.46) erhalten wir unter Beachtung von $(\omega^+_{vw} \otimes \omega^+_{cd}) \triangleleft u^i_j = \omega^+_{vw} \triangleleft u^i_e \otimes (\omega^+_{cd} \triangleleft u^e_j)$

$$
\begin{aligned}
\theta^{PQ}_{mnkl} \triangleleft u^i_j &= z^{-2} T^{vwcd}_{mnkl} \hat{R}^{ia}_{vy} \hat{R}^{wy}_{eb} \hat{R}^{es}_{cz} \hat{R}^{dz}_{jt}\, \omega^+_{ab} \otimes \omega^+_{st} \\
&= z^{-2} (\hat{R}_{12} \acute{R}_{23} \hat{R}_{34} \acute{R}_{45} T_{1234})^{iabst}_{mnklj}\, \omega^+_{ab} \otimes \omega^+_{st} \\
&= z^{-2} (T_{1234} \hat{R}_{12} \acute{R}_{23} \hat{R}_{34} \acute{R}_{45})^{iabst}_{mnklj}\, \omega^+_{ab} \otimes \omega^+_{st} \\
&= z^{-2} \theta^{PQ}_{vwst} (\hat{R}_{12} \acute{R}_{23} \hat{R}_{34} \acute{R}_{45})^{ivwst}_{mnklj}.
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

Die vorletzte Gleichung wird ersichtlich, wenn man die graphische Darstellung der beiden Seiten betrachtet, siehe Abbildung 3.2.

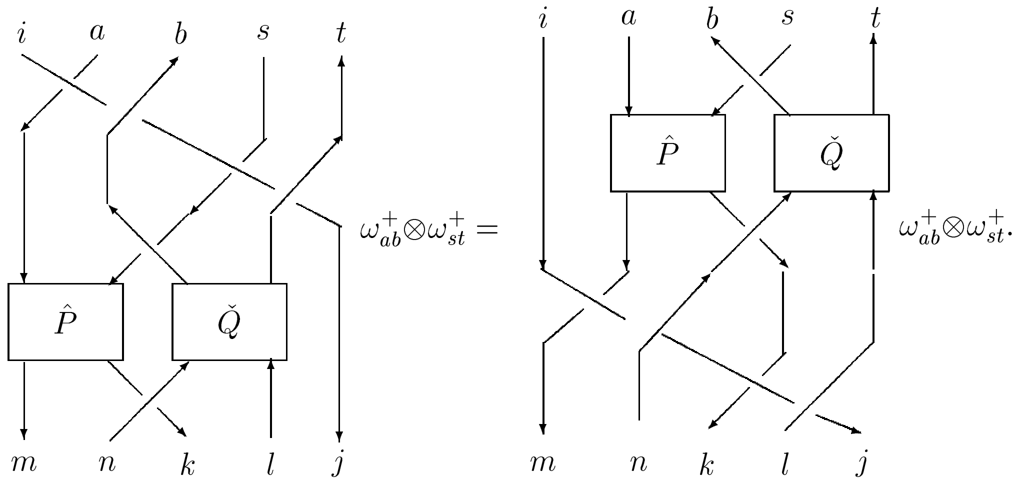



Abbildung 3.2: $\langle \theta^{PQ} \rangle$ ist abgeschlossen unter der rechtsadjungierten Wirkung.

Folglich ist $T(\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}})$ sowohl unter der rechten Kowirkung als auch unter der rechtsadjungierten Wirkung abgeschlossen. Nach Lemma 2.15 ist $\mathcal{A}T(\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes \Gamma_{\mathrm{L}})$ ein Unter-Hopf-Bimodul. Die Dimensionsaussage folgt aus der Invertierbarkeit von $\acute{R}$ und $\grave{R}^-$ sowie wegen $\mathrm{rg}(\hat{P}_{12} \check{Q}_{34}) = \mathrm{rg}\, \hat{P}\, \mathrm{rg}\, \check{Q}$.
(ii) Die erste Aussage folgt aus (i) und weil im Falle der A-Serie $(\hat{P}^+ + \hat{P}^-)_{12} (\check{P}^+ + \check{P}^-)_{34}$ und in den anderen Fällen $(\hat{P}^+ + \hat{P}^- + \hat{P}^0)_{12} (\check{P}^+ + \check{P}^- + \check{P}^0)_{34}$ die Identität auf $(\mathbb{C}^N)^{\otimes 4}$ ist. Darüber hinaus sind die $\hat{P}^\tau$ und $\hat{P}^\nu$ wie auch $\check{P}^\tau$ und $\check{P}^\nu$ für $\tau \neq \nu$ jeweils zueinander orthogonale Idempotente. Folglich ist die Summe direkt.
Nun zur zweiten Aussage: Es sei $\lambda_\tau$ der Eigenwert von $\hat{R}$ bezüglich $\hat{P}^\tau$, also $\hat{R}\hat{P}^\tau = \lambda_\tau \hat{P}^\tau$, und zwar $\lambda_+ = q$, $\lambda_- = -q^{-1}$ und, im Falle der B-, C- und D-Serien, $\lambda_0 = \mathfrak{r}^{-1}$. Man beachte, dass auch $\check{R}\check{P}^\tau = \lambda_\tau \check{P}^\tau$ gilt. Für $\rho := \grave{R}^-_{23} \hat{P}^\tau_{12} \check{P}^\nu_{34} \acute{R}_{23} (\omega^+_{ij} \otimes \omega^+_{kl})$ erhalten wir mit (2.49) und $\acute{R}\, \grave{R}^- = I$:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\rho) &= \grave{R}^-_{23} \hat{R}_{12} \check{R}^{-1}_{34} \acute{R}_{23}\ \grave{R}^-_{23} \hat{P}^\tau_{12} \check{P}^\nu_{34} \acute{R}_{23} (\omega^+_{ij} \otimes \omega^+_{kl}) \\
&= \lambda_\tau \lambda_\nu^{-1} \grave{R}^-_{23} \hat{P}^\tau_{12} \check{P}^\nu_{34} \acute{R}_{23} (\omega^+_{ij} \otimes \omega^+_{kl}) \\
&= \lambda_\tau \lambda_\nu^{-1}\, \rho.
\end{aligned}
$$

Da $q$ keine Einheitswurzel ist, gilt $\lambda_\tau \neq \lambda_\nu$ für $\tau \neq \nu$. Also ist $\rho \in (\ker A_2)_{\mathrm{L}}$ genau dann, wenn $\tau = \nu$. Wir haben also $(\ker A_2)_{\mathrm{L}} = \bigoplus_\nu \Lambda_{\mathrm{L}}^{\nu\nu}$ als lineare Räume. Wegen (i) erzeugt jeder der Räume $\Lambda_{\mathrm{L}}^{\nu\nu}$ einen Unter-Hopf-Bimodul. Damit ist der Beweis erbracht. ■

Zur Vereinfachung wählen wir eine neue Basis von $(\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma)_{\mathrm{L}}$:

$$\overline{\theta}_{vwst} = \grave{R}^{-}{}^{yz}_{ws}\, \omega^+_{vy} \otimes \omega^+_{zt}, \qquad \omega^+_{vw} \otimes \omega^+_{st} = \acute{R}^{yz}_{ws}\, \overline{\theta}_{vyzt}. \tag{3.66}$$

In dieser Basis lautet die rechte Kowirkung $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}$, und die Zopfung $\sigma$ ist nun $\overline{\sigma} = \hat{R}_{12} \check{R}_{34}^{-1}$. Wir schreiben $\Lambda^\tau$ anstelle von $\Lambda^{\tau\tau}$, $\tau \in J$. Da die Kodarstellung $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})(\hat{P}^\tau)$ irreduzibel ist und die Kodarstellung $(\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})(\check{P}^\tau)$ nach Lemma 3.26 zu ihr kontragredient ist, besitzt $\Lambda^\tau$ nach Lemma 3.23 genau ein biinvariantes Element $\eta^\tau$.

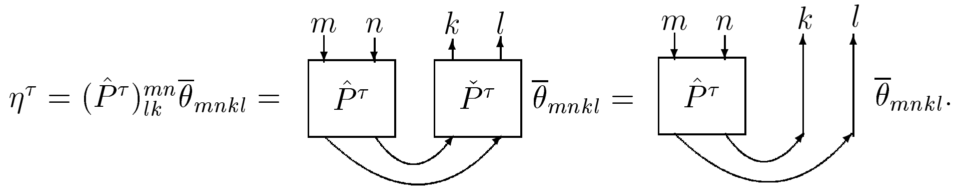



Abbildung 3.3: Die biinvarianten Elemente $\eta^\tau$.

Wegen (3.66) ist $\omega_0^+ \otimes \omega_0^+ = \hat{R}^{vy}_{tz}\, \overline{\theta}_{vyzt}$, und wegen $\hat{R} = \sum \lambda_\nu \hat{P}^\nu$ erhält man

$$\omega_0^+ \otimes \omega_0^+ = \sum_{\nu \in J} \lambda_\nu \eta^\nu. \tag{3.67}$$

Das folgende Lemma besagt, dass das Element $\eta^\tau$ bereits den gesamten Hopf-Bimodul $\Lambda^\tau$ erzeugt.

**Lemma 3.36** *Es sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra $\mathcal{O}(G_q)$ zu einer der Quantengruppen $G_q$ der vier Serien und $\Gamma = \Gamma_{+,z}$. Ferner sei $\Lambda^\tau$, $\tau \in J$ der oben definierte Unter-Hopf-Bimodul von* $\ker A_2$.
*Dann erzeugt $\eta^\tau$ bereits den vollen Hopf-Bimodul $\Lambda^\tau$. Genauer, es ist*

$$\eta^\tau \triangleleft \mathcal{A} = \Lambda^\tau_{\mathrm{L}}.$$

*Beweis.* Da der Hopf-Bimodul $\Lambda^0$ eindimensional ist, gibt es für $\tau = 0$ nichts zu zeigen. Wir fixieren also $\tau \in \{+,-\}$. Die Beweisidee ist die Folgende: Zunächst erzeugt man durch die rechtsadjungierte Wirkung mit $u^i_j$ auf $\eta^\tau$ gewisse $N^2$ Elemente $\eta^\tau_{ij}$, und dann, durch erneute Wirkung von $u^i_j$ auf $\eta^\tau_{st}$ die Elemente $\eta^\tau_{sijt}$, die schließlich eine Basis von $\Lambda^\tau$ bilden. Die Rechnungen sind technisch recht aufwändig und werden, zur besseren Veranschaulichung der Umformungen, unter Benutzung des graphischen Kalküls durchgeführt.
Nach Lemma 3.35 besteht die kanonische linksinvariante Basis von $\Lambda^\tau$ aus den Elementen

$$\theta^\tau_{mnkl} = \grave{R}^{-}_{23} \hat{P}^\tau_{12} \check{P}^\tau_{34} \acute{R}_{23} (\omega^+_{mn} \otimes \omega^+_{kl}) = \grave{R}^{-}{}^{ws}_{yz} (\hat{P}^\tau)^{vy}_{ma} (\check{P}^\tau)^{zt}_{bl} \acute{R}^{ab}_{nk}\, \omega^+_{vw} \otimes \omega^+_{st}.$$

Wir werden diese Elemente in den oben genannten zwei Schritten erzeugen.
(a) Wir führen zunächst den Beweis für den komplizierteren Fall der B-, C- und D-Serien durch (3 Morphismen in $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ anstelle von 2 Morphismen bei der A-Serie).
Zunächst berechnen wir $\eta^\tau \triangleleft u^i_j$ und erhalten eine Linearkombination der Elemente $\eta^\tau$,

$$\eta^\tau_{ij} = B^i_z(\hat{P}^\tau)^{mn}_{zk}(\check{P}^\tau)^{vw}_{ky}C^j_y\,\overline{\theta}_{mnvw} \quad \text{(entfällt bei der A-Serie)} \quad \text{und}$$
$$\xi^\tau_{ij} = (\hat{P}^\tau)^{mn}_{yk}(\check{P}^\tau)^{vw}_{kz}\acute{R}^{yz}_{ij}\,\overline{\theta}_{mnvw}.$$

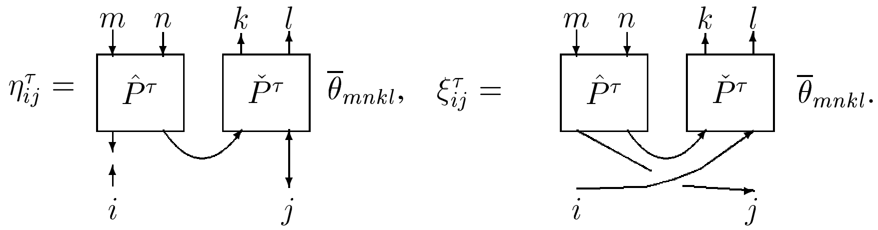



Abbildung 3.4: Die graphische Darstellung der Elemente $\eta^\tau_{ij}$ und $\xi^\tau_{ij}$.

Wir zeigen zuerst, dass die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$\eta^\tau \triangleleft \widetilde{u}^i_j = \hat{q}(\lambda_\tau^2+1)\xi^\tau_{ij} - \mathfrak{r}^{-1}\hat{q}(1+\lambda_\tau^{-2})\eta^\tau_{ij}, \tag{3.68}$$
$$\eta^\tau \triangleleft \widetilde{U} = \alpha_\tau\eta^\tau, \quad \alpha_\tau = \hat{q}(\lambda_\tau+\lambda_\tau^{-1})(\lambda_\tau\mathfrak{r}-\lambda_\tau^{-1}\mathfrak{r}^{-1}). \tag{3.69}$$

Der Vollständigkeit halber ergänzen wir, dass für alle $a\in\mathcal{A}$

$$\eta^0 \triangleleft a = \varepsilon(a)\eta^0, \tag{3.70}$$

da $\Lambda^0$ ein eindimensionaler Unter-Hopf-Bimodul ist. Die obige Gleichung ist äquivalent dazu, dass alle $a\in\mathcal{A}$ mit $\eta^0$ vertauschen.
Analog zur Herleitung von (3.65) erhält man mit (3.66) und (2.46) unter Beachtung von $z^2=1$:

$$\begin{aligned}\overline{\theta}_{mnkl}\triangleleft u^i_j &= \grave{R}^{-\,ab}_{\ \ nk}(\omega^+_{ma}\triangleleft u^i_c)(\omega^+_{bl}\triangleleft u^c_j)\\ &= \grave{R}^{-\,ab}_{\ \ nk}\hat{R}^{iv}_{my}\hat{R}^{ay}_{cd}\hat{R}^{cp}_{bz}\hat{R}^{lz}_{jt}\,\omega^+_{vd}\otimes\omega^+_{pt}\\ &= (\acute{R}_{34}\hat{R}_{12}\acute{R}_{23}\hat{R}_{34}\acute{R}_{45}\grave{R}^-_{23})^{ivwst}_{mnklj}\,\overline{\theta}_{vwst}.\end{aligned} \tag{3.71}$$

Zur besseren Veranschaulichung geben wir die graphische Darstellung des betreffenden Morphismus' an.

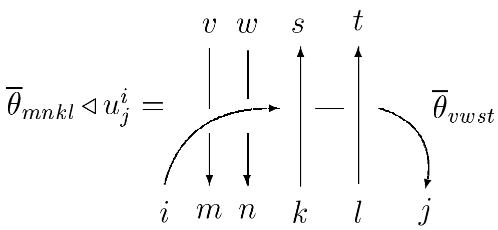



Abbildung 3.5: Die rechtsadjungierte Wirkung von $u^i_j$ auf $\overline{\theta}_{mnkl}$.

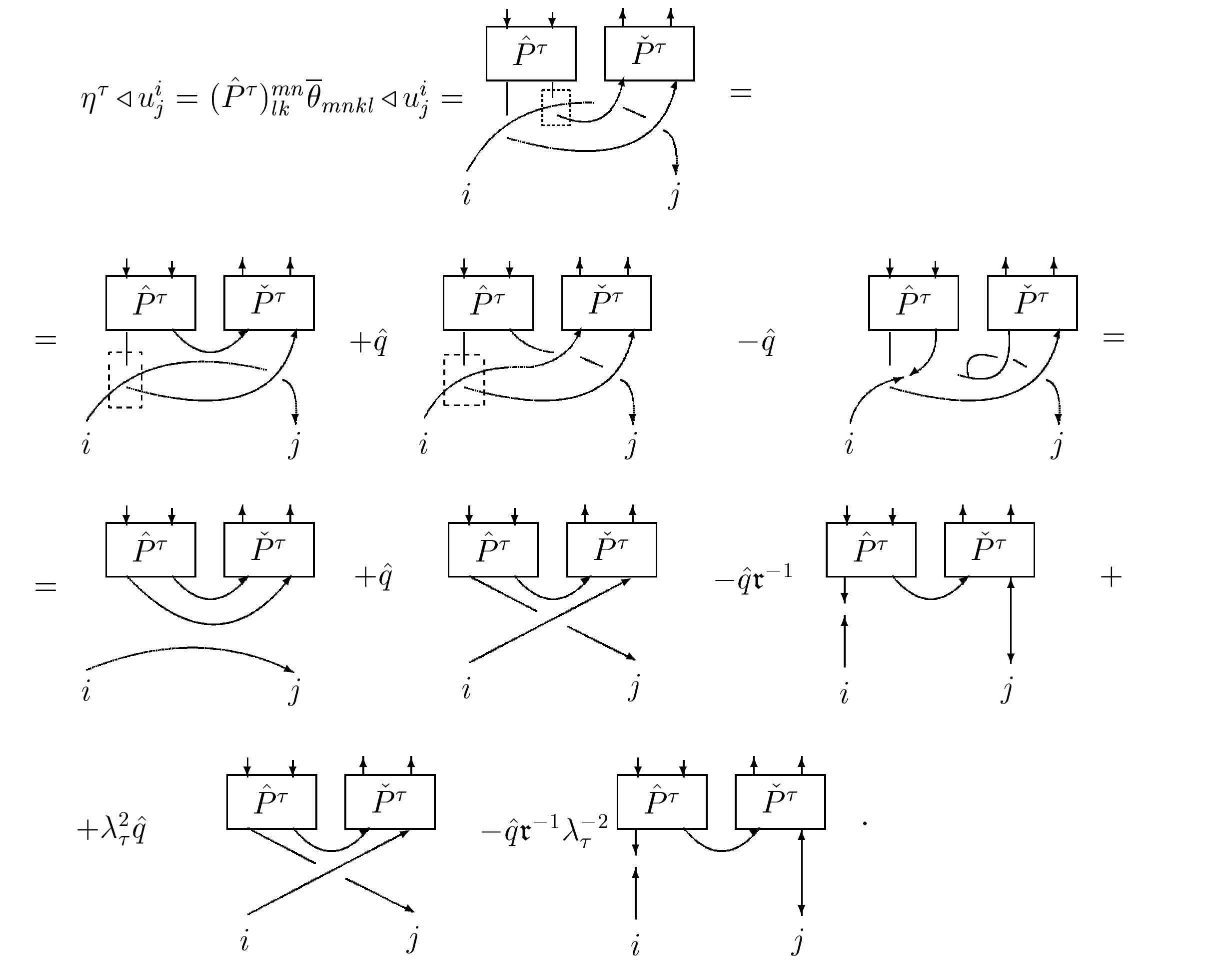



Abbildung 3.6: Der Beweis von (3.68).

Wir berechnen nun die Wirkung von $u^i_j$ auf $\eta^\tau$ mit Hilfe des graphischen Kalküls. Im ersten Schritt löst man mittels $\hat{R}^{-1} = \hat{R} - \hat{q}I + \hat{q}K$ die Kreuzung $\hat{R}$ in der gepunkteten Box auf und erhält die drei anderen Summanden mit $\hat{R}^{-1}$, $I$ und $K$. Im zweiten Schritt tut man dasselbe mit der $\hat{R}$-Matrix im ersten Summanden (gepunktete Box). Das liefert die ersten drei Summanden der nächsten Zeile. Im zweiten Summanden trifft die Matrix $\check{R}$ auf den zweiten Projektor und liefert somit $\lambda_\tau I$. Dabei wird diese Kreuzung aufgelöst und es entsteht eine zweite Kreuzung ($\hat{R}$-Matrix), die auf den ersten Projektor $\hat{P}^\tau$ trifft und somit einen weiteren Faktor $\lambda_\tau$ liefert. So entsteht der vierte Summand der letzten Gleichung. Mit dem dritten Summanden der zweiten Gleichung verfahren wir analog. Das Herausdrehen der Schlaufe liefert den Faktor $\mathfrak{r}^{-1}$, und die beiden inversen $R$-Matrizen liefern jeweils den Faktor $\lambda_\tau^{-1}$. Wegen $\widetilde{u}^i_j = u^i_j - \delta_{ij}1$ folgt hieraus sofort (3.68). Multiplizieren wir (3.68) mit $D^j_i$ und beachten, dass $D^j_i\eta^\tau_{ij} = \eta^\tau$ und $D^j_i\xi^\tau_{ij} = \mathfrak{r}\eta^\tau$ gelten, erhalten wir (3.69). Wir wollen in der Gleichung (3.68) den Term $\eta^\tau_{ij}$ eliminieren. Da $q$

keine Einheitswurzel ist, ist $T_\tau = \hat{q}(\lambda_\tau^2+1)\hat{R}^{-1} - \mathfrak{r}^{-1}\hat{q}(1+\lambda_\tau^{-2})$ invertierbar mit der Inversen

$$\begin{aligned} T_+^{-1} &= \frac{1}{\hat{q}[\![2]\!]_q}\left(\frac{1}{1-q^{-1}\mathfrak{r}^{-1}}\hat{P}^+ + \frac{1}{-q^2-q^{-1}\mathfrak{r}^{-1}}\hat{P}^- + \frac{1}{\mathfrak{r}q-\mathfrak{r}^{-1}q^{-1}}\hat{P}^0\right), \\ T_-^{-1} &= \frac{1}{\hat{q}[\![2]\!]_q}\Big(\frac{1}{q^{-2}-q\mathfrak{r}^{-1}}\hat{P}^+ + \frac{1}{-1-q\mathfrak{r}^{-1}}\hat{P}^- + \frac{1}{q^{-1}\mathfrak{r}-q\mathfrak{r}^{-1}}\hat{P}^0\Big). \end{aligned}$$

Setzt man $(S_\tau)^{ij}_{st} = B^y_i(T_\tau^{-1})^{yj}_{zt}C^s_z$ und multipliziert (3.68) mit $S_\tau$, erhält man $(S_\tau)^{ij}_{st}\eta^\tau \triangleleft \widetilde{u}^i_j = \eta^\tau_{st}$. Folglich liegen die Elemente $\eta^\tau_{st}$, $s,t = 1,\dots,N$ und $\tau \in \{+,-\}$ in $\Lambda^\tau$. Im zweiten Schritt berechnen wir die rechtsadjungierte Wirkung von $u^i_j$ auf den Elementen $\eta^\tau_{st}$. Wir erhalten eine Linearkombination der Elemente

$$\begin{aligned} \xi^\tau_{istj} &:= (\hat{P}^\tau)^{mn}_{ky}(\check{P}^\tau)^{vw}_{zl}\acute{R}^{yz}_{st}B^i_kC^j_l\,\overline{\theta}_{mnvw}, \\ \eta^\tau_{istj} &:= B^i_yB^s_z(\hat{P}^\tau)^{mn}_{yz}(\check{P}^\tau)^{vw}_{dc}C^t_dC^j_c\,\overline{\theta}_{mnvw}. \end{aligned}$$

Ihre graphische Darstellung findet man in der Abbildung 3.7.

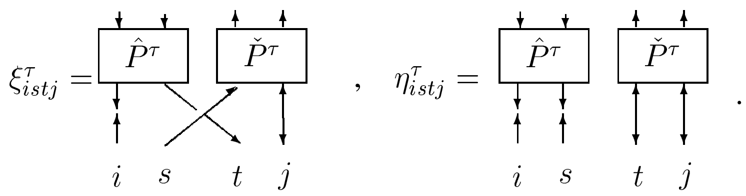



Abbildung 3.7: Die Elemente $\xi^\tau_{istj}$ und $\eta^\tau_{istj}$.

Es gilt offenbar

$$\xi^\tau_{sijt} = \eta^\tau_{syzt}C^k_yB^l_z\acute{R}^{kl}_{ij}. \tag{3.72}$$

Wegen (3.71) gilt

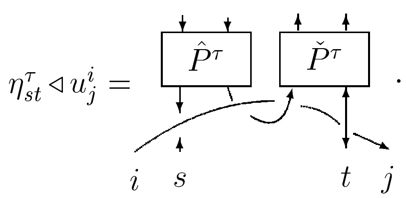



Abbildung 3.8: Die rechtsadjungierte Wirkung von $u^i_j$ auf $\eta^\tau_{st}$.

Ersetzt man eine Matrix $\hat{R}$ durch $\hat{R}^{-1} + \hat{q}I - \hat{q}K$, so erhält man ähnlich zu den graphischen Berechnungen in Abbildung 3.6.

$$\zeta^\tau_{sijt} := \eta^\tau_{uv} \triangleleft u^a_b\,\check{R}^{au}_{si}\hat{R}^{vb}_{jt} - \delta_{ij}\eta^\tau_{st} = \hat{q}\xi^\tau_{sijt} - \hat{q}\mathfrak{r}^{-1}\eta^\tau_{sijt}. \tag{3.73}$$

Wegen $\eta^\tau_{uv} \in \Lambda^\tau_{\mathrm{L}}$ und der Abgeschlossenheit von $\Lambda^\tau_{\mathrm{L}}$ unter der rechtsadjungierten Wirkung ist $\zeta^\tau_{sijt} \in \Lambda^\tau_{\mathrm{L}}$ für alle $i, j, s, t$. Somit gilt wegen (3.73) und (3.72) $\xi^\tau_{sijt} = (C^{\mathfrak{t}}_1 T B^{\mathfrak{t}}_1)^{abcd}_{sijt}\, \eta^\tau_{abcd}$, wobei $T = \hat{q}(\hat{R}^{-1} - \mathfrak{r}^{-1} I)$. Da $q$ keine Einheitswurzel ist, ist $T$ invertierbar und hat als inverse Matrix $T^{-1} = \hat{q}^{-1}\big((q^{-1} - \mathfrak{r}^{-1})^{-1}\hat{P}^+ - (q + \mathfrak{r}^{-1})^{-1}\hat{P}^-\big)$. Also gehört

$$B^y_i (T^{-1})^{yj}_{zl} C^k_z \zeta^\tau_{sijt} = \eta^\tau_{sklt}$$

zu $\Lambda^\tau_{\mathrm{L}}$. Durch geeignete Linearkombination dieser Elemente erhält man schließlich $B^m_v B^a_y C^b_z C^l_t\, \eta^\tau_{vyzt}\, \acute{R}^{ab}_{nk} = \theta^\tau_{mnkl}$, was den Beweis vollendet.
(b) Wir betrachten nun den Fall $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$. Dabei führen wir den Beweis nur für die Kalküle $\Gamma = \Gamma_{+,z}$. Der Beweis für die Kalküle $\Gamma_{-,z}$ verläuft analog. Ähnlich zum Teil (a) dieses Beweises leitet man auf graphischem Wege die zu (3.68) analoge Formel her. Es ist klar, dass bei der A-Serie wegen $\hat{R}^{-1} = \hat{R} - \hat{q}I$ der jeweils dritte Summand in Abbildung 3.6 entfällt und somit auch der letzte Summand der letzten Gleichung. Wir erhalten damit:

$$\eta^\tau \triangleleft u^i_j = z^{-2}\delta_{ij}\eta^\tau + z^{-2}\hat{q}(\lambda_\tau^{-2} + 1)\xi^\tau_{ij}. \tag{3.74}$$

Also liegen die Elemente $\xi^\tau_{ij}$ in $\Lambda^\tau_{\mathrm{L}}$. Zur Vereinfachung multiplizieren wir noch die Elemente $\xi^\tau_{ij}$ mit $\grave{R}^{-ij}_{rs}$ und erhalten die Elemente

$$\overline{\xi}^\tau_{rs} := (\hat{P}^\tau)^{mn}_{rk} (\check{P}^\tau)^{vw}_{ks} \overline{\theta}_{mnvw}.$$

Die erneute Wirkung von $u^i_j$ auf $\overline{\xi}^\tau_{rs}$ liefert mit (3.71) nach Einfügen von $z^{-2}$, da wir die A-Serie betrachten,

$$\begin{aligned} \overline{\xi}^\tau_{sr} \triangleleft u^i_j \grave{R}^{-ir}_{ab} \grave{R}^{-sj}_{kl} &= z^{-2} (\hat{P}^\tau)^{mn}_{ax} \acute{R}^{xy}_{bz} \acute{R}^{yu}_{zk} (\check{P}^\tau)^{vw}_{ul}\, \overline{\theta}_{mnvw} \\ &= z^{-2}\big(\delta_{bk}\, \overline{\xi}^\tau_{al} + \hat{q}(\hat{P}^\tau)^{mn}_{ax} (\check{P}^\tau)^{vw}_{ul} \acute{R}^{xu}_{bk}\, \overline{\theta}_{mnvw}\big). \end{aligned}$$

Dabei benutzten wir (A.4). Der erste Summand auf der rechten Seite liegt bereits in $\eta^\tau \triangleleft \mathcal{A}$ wie auch die linke Seite. Folglich liegt auch der zweite Summand der rechten Seite in $\eta^\tau \triangleleft \mathcal{A}$, das ist, bis auf den Faktor $\hat{q}$,

$$(\hat{P}^\tau)^{mn}_{ax} (\check{P}^\tau)^{vw}_{ul} \acute{R}^{xu}_{bk}\, \overline{\theta}_{mnvw} = \theta^\tau_{abkl}.$$

Die Elemente $\theta^\tau_{abkl}$ bilden aber die kanonische linksinvariante Basis von $\Lambda^\tau$. ■

**Folgerung 3.37** (i) *Es seien $\mathcal{A}$ und $\Gamma$ wie im Lemma und $\Lambda$ ein Unter-Hopf-Bimodul von* $\ker A_2$, *der $\omega_0^+ \otimes \omega_0^+$ enthält. Dann fallen die Unter-Hopf-Bimoduln $\Lambda$ und* $\ker A_2$ *zusammen.*
(ii) *Es sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra zu einer orthogonalen oder symplektischen Quantengruppe, $\Gamma$ wie im Lemma und $\Lambda$ ein Unter-Hopf-Bimodul von* $\ker A_2$, *der die Elemente $\eta^+$ und $\eta^-$ enthält. Dann gilt*

$$\Lambda + \langle \eta^0 \rangle = \ker A_2.$$

(iii) *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2))$ oder $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))$ und $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ mit $z = \nu q$, $\nu \in \{+1, -1\}$ einer der $4D_\pm$-Kalküle über $\mathcal{A}$. Ferner sei $\Lambda$ ein Unter-Hopf-Bimodul von* $\ker A_2$, *der das Element $\eta^+$ enthält. Dann gilt*

$$\Lambda + \langle \eta^0 \rangle = \ker A_2.$$

*Beweis*. (i) Beachtet man (3.67) und (3.69), so erhält man mit der rechtsadjungierten Wirkung von $\widetilde{U}^i$, $i = 0, 1, \ldots, j-1$ auf $\omega_0^+ \otimes \omega_0^+$ ein lineares Gleichungssystem mit den Variablen $\eta^\nu$, $\nu \in J$ und der Koeffizientenmatrix bestehend aus den $j$ Zeilen $\lambda_\nu \alpha_\nu^i$, $i = 0, 1, \ldots, j-1$. Wegen der Regularität dieser Matrix, die Determinante ist gleich $\prod_\nu \lambda_\nu \prod_{\nu,\mu}(\alpha_\nu - \alpha_\mu)$, hat man $\eta^\nu \in \Lambda$. Nach dem obigen Lemma ist dann aber auch $\Lambda^\nu \subseteq \Lambda$ für alle $\nu \in J$ und damit $\ker A_2 = \bigoplus_{\nu \in J} \Lambda^\nu \subseteq \Lambda$, was zu zeigen war.
(ii) Da $\eta^+$ und $\eta^-$ beide in $\Lambda$ liegen, umfasst $\Lambda$ somit auch die von diesen beiden biinvarianten Elementen erzeugten Unter-Hopf-Bimoduln von $\ker A_2$. Einzig der vom Element $\eta^0$ erzeugte eindimensionale Unter-Hopf-Bimodul könnte noch als Komplement zu $\Lambda$ fehlen. Die obige Summe ist genau dann direkt, wenn $\eta^0$ nicht in $\Lambda$ liegt.
(iii) Es gibt nur zwei biinvariante Elemente in $\ker A_2$, von denen das eine in $\Lambda$ enthalten ist. $\Lambda$ enthält somit den gesamten von $\eta^+$ erzeugten 9-dimensionalen Unter-Hopf-Bimodul von $\ker A_2$. ∎

Für das folgende Lemma, Teil (i) und (ii), setzen wir $\vartheta = \omega(U) = \sum_i q^{-2i}\omega_{ii}$ und $\eta = \mathcal{S}(U) = \sum_{i,j} q^{-2i}\omega_{ij} \otimes \omega_{ji}$. Dabei sei $\omega$ die $\omega$-Abbildung von $\Gamma_{\tau,z}$ und $U$ die Quantenspur. Dann sind $\vartheta$ und $\eta$ biinvariant wegen

$$\Delta_{\mathrm{R}}(\omega_{ij}) = \Delta_{\mathrm{R}}(S(u^i_x)\mathrm{d}u^x_j) = \big(S(u^k_x) \otimes S(u^i_k)\big)(\mathrm{d}u^x_l \otimes u^l_j) = \omega_{kl} \otimes (\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u})^{kl}_{ij}$$

und $(q^{-2i}\delta_{ij}) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \otimes \boldsymbol{u})$. Mehr noch, die beiden Elemente $\eta$ und $\vartheta \otimes \vartheta$ bilden eine Basis von $\Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}}$.
Wir wollen zeigen, dass im Falle der A-Serie $\omega_0^\tau \otimes \omega_0^\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ für alle Kalküle mit Ausnahme von $N = 2$, $\tau = +$ und $z^2 = q^2$ gilt. Wir setzen voraus, dass $q$ eine transzendente komplexe Zahl ist. Für den oben genannten Ausnahmefall zeigen wir, dass der Raum $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ zumindest das Element $\eta^+$ enthält und damit nach Folgerung 3.37 (iii) den gesamten 9-dimensionalen Unter-Hopf-Bimodul $\Lambda^+$. Für die Standardkalküle auf den Quantengruppen der B-, C- und D-Serien wollen wir zeigen, dass sie die Elemente $\eta^+$ und $\eta^-$ enthalten.

**Lemma 3.38** (i) *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$. Ferner sei $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\tau,z}$ und $z$ sei generisch, das heißt, $\mathfrak{n}_{\tau,z} \neq 0$.*
*Dann gilt für $N \geq 3$, und für $N = 2$, $\tau = +$ und $z^2 \neq q^2$, dass $\vartheta \otimes \vartheta \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$.*
(ii) *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2))$ oder $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))$ und $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ mit $z = \nu q$, $\nu \in \{1, -1\}$.*
*Dann ist $\xi := \mathcal{S}(\widetilde{U}U - \lambda\widetilde{U})$ mit $\lambda = \nu(q^{-1} + q^{-5})$ ein von Null verschiedenes Vielfaches von $\eta^+$ und liegt in $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.*
(iii) *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$, $\Gamma = \Gamma_+$ oder $\Gamma = \Gamma_-$ sowie $q$ keine Einheitswurzel. Für den $\Gamma_-$-Kalkül setzen wir zusätzlich voraus, dass $2\mathfrak{s} + (q - q^{-1})(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^{-1}) \neq 0$.*
*Dann gilt $\eta^+, \eta^- \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$.*

Der Beweis von Lemma 3.38 ist in den Anhang B verlegt worden.

**Folgerung 3.39** (i) *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren zur A-Serie und es mögen dieselben Voraussetzungen wie im obigen Lemma unter (i) gelten. Dann gilt*

$$\mathcal{A}\,\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \ker A_2.$$

(ii) *Es seien $\mathcal{A}$, $\Gamma$ und $z$ wie im obigen Lemma unter (ii) oder (iii) gegeben. Dann gilt*

$$\mathcal{A}\,\mathcal{S}(\mathcal{R}) + \Lambda^0 = \ker A_2. \tag{3.75}$$

*Beweis*. (i): Da $z$ generisch ist, ist $\omega_0^\tau \otimes \omega_0^\tau$ ein von Null verschiedenes Vielfaches von $\vartheta \otimes \vartheta$. Zusammen mit Folgerung 3.37 (i) erhält man die Behauptung.
(ii): Die Behauptung für die orthogonalen und symplektischen Quantengruppen erhält man aus Folgerung 3.37 (ii). Für den Ausnahmefall bei $\mathrm{GL}_q(2)$ und $\mathrm{SL}_q(2)$ ergibt sich die Behauptung aus Folgerung 3.37 (iii). ■

Mit Punkt (i) der obigen Folgerung ist der Beweis von Theorem 3.13 (ii) fertig.
Haben wir mit (3.75) eine Möglichkeit erhalten, die Mindestgröße von $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ abzuschätzen, wollen wir nun die Mindestgröße von ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge 2}$, des zu $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ komplementären Teilraumes, abschätzen. Die Direktheit der Summe (3.75) soll gezeigt werden. Dazu werden wir Lemma 3.8 verwenden und den Raum der quadratisch-linearen Relationen in $\mathcal{X}\otimes\mathcal{X} + \mathcal{X}$ untersuchen. Genau genommen vergleichen wir nur die Räume der $\triangleleft$-invarianten Elemente von $\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}$, $\mathcal{X}\wedge\mathcal{X}$ und $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$, und somit, vermöge der Dualität, auch die Räume der biinvarianten Elemente von $\Gamma\otimes_{\mathcal{A}}\Gamma$, ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge 2}$ bzw. ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}$. Hierbei ist $\mathrm{m}\colon \mathcal{A}^\circ\otimes\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{X}$ die Multiplikationsabbildung.

Wir benötigen für das folgende Lemma im Fall $\mathrm{GL}_q(2)$ noch eine Relation zwischen der Quantendeterminante $\mathcal{D}$ und der universellen $r$-Form. Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ mit der $r$-Form $\boldsymbol{r}_x$, $x \in \mathbb{C}^\times$ aus Satz 2.6. Im Beweis von [62, Theorem 11.51, S. 440] findet man die Peter-Weyl-Zerlegung von $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$,

$$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N)) = \sum_{r,s\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}^{-r}\mathcal{A}_s(\hat{R}),$$

wobei $\mathcal{A}_s(\hat{R})$ die homogene Komponente von $\mathcal{A}(\hat{R})$ vom Grade $s$ ist. Es sei $a \in \mathcal{D}^{-m}\mathcal{A}_n(\hat{R})$ für fixierte Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\boldsymbol{r}_x(a, \mathcal{D}) = \boldsymbol{r}_x(\mathcal{D}, a) = (qx^{-N})^k\,\varepsilon(a), \tag{3.76}$$

wobei $k = -mN + n$ ist. Der Beweis dieser Gleichung folgt unmittelbar aus der zentralen Formel für die $r$-Form von Elementen der Gestalt $a\mathcal{D}^{-m}$ in [62, S. 340].

**Lemma 3.40** (i) *Es seien $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ und $N \geq 3$, $\Gamma = \Gamma_{+,1}$ oder $\Gamma_{+,-1}$ einer der beiden $N^2$-dimensionalen bikovarianten Standardkalküle über $\mathcal{A}$ mit dem Quanten-Tangentialraum $\mathcal{X}$ und dessen Basis* (2.47). *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\dim {}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge 2} = 0, \quad && \dim(\mathcal{X}\wedge\mathcal{X})_0 = 0, \quad && \dim(\ker A_2)_{\mathrm{Inv}} = 3,\\
&\dim {}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge 2} \geq 1, && \mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})_0 \supseteq \langle T\rangle, && \dim \mathcal{S}(\mathcal{R})_{\mathrm{Inv}} \leq 2,
\end{aligned}$$

*wobei*

$$T = X_{ij}\otimes X_{mn}\,B^i_y \hat{R}^{jy}_{mz} C^n_z. \tag{3.77}$$

(ii) *Es sei* $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(2))$ *oder* $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(2))$, $z^2 = q^2$, $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ *und* $\mathcal{X}$ *der zugehörige Quanten-Tangentialraum mit der Basis* (2.47). *Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\dim {}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}} = 0, \quad &&\dim(\mathcal{X}\wedge\mathcal{X})_0 = 0, \quad &&\dim(\ker A_2)_{\mathrm{Inv}} = 2,\\ &\dim {}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}} \geq 1, \quad &&\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})_0 \supseteq \langle T\rangle, \quad &&\dim \mathcal{S}(\mathcal{R})_{\mathrm{Inv}} \leq 1, \end{aligned}$$

*wobei* $T$ *wie in* (3.77) *gewählt ist mit* $B = C^{-1}$. *Die Matrix* $C^i_j = \varepsilon_{ij}$ *ist der* $q$*-antisymmetrische Tensor* (2.6).

*Beweis*. (a) Wir zeigen zunächst, dass im orthogonalen und symplektischen Fall die Gleichung $\dim \Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}} = \dim(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X})_0 = 3$ gilt. Es ist bekannt, dass $\dim \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = 3$ und dass $I$, $\hat{R}$ und $K$ eine lineare Basis von $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ bilden, vergleiche Anhang A. Benutzt man (A.9), so sieht man, dass die Abbildung $E \mapsto (B^s_z C^r_y E^{ab}_{yz})$ einen linearen Isomorphismus von $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ nach $\mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$ definiert. Nun ist aber $\rho = \alpha^{ijmn}\theta_{ij}\otimes\theta_{mn} \in \Gamma\otimes_{\mathcal{A}}\Gamma$ genau dann biinvariant, wenn $(\alpha^{ijmn}) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}\otimes\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})$. Damit ist $\dim \Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}} = \dim(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X})_0 = 3$ gezeigt. Ist $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren vom Typ A, dann gilt $\dim \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = 2$. Völlig analog zu den obigen Schlüssen erhält man $\dim \Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}} = \dim(\mathcal{X}\otimes\mathcal{X})_0 = 2$.
(b) Es sei $\{\theta_{ij} \mid i,j = 1,\dots,N\}$ die Basis von $\Gamma_{\mathrm{L}}$ und $\theta = \sum_i \theta_{ii}$ die biinvariante 1-Form. Dann sind die Elemente $\theta\otimes\theta$, $\eta = D^k_j \theta_{ik}\otimes\theta_{ji}$, und $\xi = C^i_z \hat{R}^{ym}_{zn} B^y_j \theta_{ij}\otimes\theta_{mn}$ biinvariante 2-Formen, die im orthogonalen und symplektischen Fall eine Basis von $\Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}}$ bilden; im Falle der A-Serie ($\mathrm{SL}_q(2)$ und $\mathrm{GL}_q(2)$) bilden $\theta\otimes\theta$ und $\eta$ eine Basis von $\Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}}$, da dieser Raum nur zweidimensional ist. Mit Hilfe des graphischen Kalküls überzeugt man sich leicht davon, dass die Zopfung $\sigma$ auf $\Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}}$ wie die Identität wirkt:

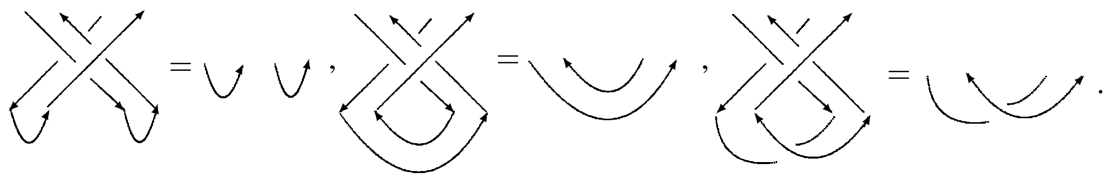


Abbildung 3.9: Die Wirkung von $\sigma$ auf den drei biinvarianten 2-Tensoren.

Folglich gilt, im Fall (i) wie auch im Fall (ii), $\Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}} \subseteq \ker A_2$ und somit ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}} = \{0\}$. Wegen Folgerung 3.9 ist auch $(\mathcal{X}\wedge\mathcal{X})_0 = \{0\}$.
(c) Wir betrachten den Fall (i). Wegen (2.16) und [84, Remark 21] gilt

$$\begin{aligned} \hat{R}^{wm}_{vj}(\ell^{-\mathsf{c}})^m_y \ell^{+j}_z &= \ell^{+w}_j (\ell^{-\mathsf{c}})^v_m \hat{R}^{jy}_{mz},\\ \boldsymbol{\ell}^{\pm} C^{\mathsf{t}} \boldsymbol{\ell}^{\pm\mathsf{t}} &= C^{\mathsf{t}} 1. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Es sei

$$T_0 = \ell^i_j\, \ell^m_n\, B^i_y \hat{R}^{jy}_{mz} C^n_z = (\ell^{-\mathsf{c}})^w_i \ell^{+w}_j (\ell^{-\mathsf{c}})^v_m \ell^{+v}_n\, B^i_y \hat{R}^{jy}_{mz} C^n_z.$$

Wir benutzen zunächst die obigen Gleichungen (3.78), (A.11) und schließlich auch (A.13) und erhalten

$$\begin{aligned} T_0 &= S(\ell^{-i}_w)(\ell^{-\mathfrak{c}})^m_y \ell^{+j}_z \hat{R}^{wm}_{vj} \ell^{+v}_n B^i_y C^n_z \\ &= S(\ell^{-i}_w) S(\ell^{-y}_m) \hat{R}^{wm}_{vj} C^v_j B^i_y \\ &= \mathfrak{r}^{-1} S(\ell^{-y}_m \ell^{-i}_w C^w_m) B^i_y \\ &= \mathfrak{r}^{-1} C^i_y B^i_y 1 = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{s}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Beachtet man $X_{ij} = \varepsilon_\pm \ell^i_j - \delta^i_j$, (2.47), die obige Umformung und wieder (A.11) und (A.13), so folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(T) &= (\varepsilon_\pm \ell^i_j - \delta^i_j)(\varepsilon_\pm \ell^m_n - \delta^m_n) B^i_y \hat{R}^{jy}_{mz} C^n_z \\ &= T_0 - \varepsilon_\pm B^i_y \hat{R}^{iy}_{mz} C^n_z \ell^m_n - \varepsilon_\pm B^i_y \hat{R}^{jy}_{mz} C^m_z \ell^i_j + B^i_y \hat{R}^{iy}_{mz} C^m_z \\ &= \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{s} - \varepsilon_\pm B^m_z C^n_z \ell^m_n - \varepsilon_\pm B^i_y C^j_y \ell^i_j + \mathfrak{s}) \\ &= -2\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-1} X_0. \end{aligned}$$

Also gilt $T \in \mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})$ und wegen der $\triangleleft$-Invarianz von $T$ ist $\dim(\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})_0) \geq 1$. Betrachtet man die Projektion $P \in \mathrm{Mor}(\Delta_{\mathrm{R}}\lceil_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{L}})$ von ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{L}}$ auf den Teilraum ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}}$ und wendet auf $P$ Folgerung 3.9 an, so ergibt sich, dass die Einschränkung der Bilinearform auf ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}} \times \mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})_0$ nicht ausgeartet ist. Wegen ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge 2}_{\mathrm{Inv}} = \Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}}/\mathcal{S}(\mathcal{R})_{\mathrm{Inv}}$ und $\dim \Gamma^{\otimes 2}_{\mathrm{Inv}} = 3$ erhalten wir $\dim \mathcal{S}(\mathcal{R})_{\mathrm{Inv}} \leq 2$.
Wir betrachten den Fall (ii). Es gilt die folgende Modifikation der Gleichung (3.78):

$$\boldsymbol{\ell}^\pm C^{\mathfrak{t}} \boldsymbol{\ell}^{\pm\mathfrak{t}} = C^{\mathfrak{t}} f^\pm, \tag{3.80}$$

wobei $f^+(a) = \boldsymbol{r}_x(a, \mathcal{D})$ und $f^-(a) = \overline{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{op}}_y(a, \mathcal{D})$. Nach (2.13) ist nämlich

$$\begin{aligned} \ell^{+i}{}_j C^k_j \ell^{+l}{}_k(a) &= \boldsymbol{r}_x(a_{(1)}, u^i_j) \boldsymbol{r}_x(a_{(2)}, u^l_k) C^k_j \\ &= \boldsymbol{r}_x(a, u^l_k u^i_j C^k_j) = \boldsymbol{r}_x(a, C^l_i \mathcal{D}) = C^l_i f^+(a). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Gleichung für $\boldsymbol{\ell}^-$. Wir setzen $T_0$ wie oben und fügen in (3.79) die notwendigen Ergänzungen ein:

$$\begin{aligned} T_0 &= S(\ell^{-i}_w)\,(\ell^{-\mathfrak{c}})^m_y\, \ell^{+j}_z\, \hat{R}^{wm}_{vj}\, \ell^{+v}_n\, B^i_y C^n_z \\ &= S(\ell^{-i}_w) S(\ell^{-y}_m)\, \hat{R}^{wm}_{vj} C^v_j\, f^+\, B^i_y \\ &= \mathfrak{r}^{-1} S(\ell^{-y}_m \ell^{-i}_w\, C^w_m)\, f^+\, B^i_y \\ &= \mathfrak{r}^{-1} C^i_y S(f^-)\, B^i_y\, f^+ = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{s}\, S(f^-) f^+. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $S(f^-)f^+ = 1$ für $z^2 = q^2$. Dazu sei $a \in \mathcal{D}^{-m}\mathcal{A}_n(\hat{R})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt wegen (3.76) mit $k = -mN + n$

$$\begin{aligned} (S(f^-)f^+)(a) &= f^-(S(a_{(1)}))\, f^+(a_{(2)}) = \overline{\boldsymbol{r}}_y(\mathcal{D}, S(a_{(1)})) \boldsymbol{r}_x(a_{(2)}, \mathcal{D}) = \boldsymbol{r}_y(\mathcal{D}, a_{(1)}) \boldsymbol{r}_x(a_{(2)}, \mathcal{D}) \\ &= \varepsilon(a_{(1)}) \varepsilon(a_{(2)}) (qx^{-N})^k (qy^{-N})^k \\ &= \varepsilon(a)(q^2\, z^{-N})^k = \varepsilon(a). \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung setzten wir $N = 2$ sowie die Voraussetzung $z^2 = q^2$ ein. Betrachtet man nun $X_{ij}^+ = \ell_j^i - \delta_{ij}$, erhält man wie im Teil (i): $\mathrm{m}(T) = -2\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-1}X_0^+$. Somit ist $\mathrm{m}^{-1}(\mathcal{X})_0 \supseteq \{T\}$ und, wegen der Dualität, $\dim \mathcal{S}(\mathcal{R})_{\mathrm{Inv}} \leq 1$. Damit ist der Beweis vollständig.

■

Nun können wir die Beweise von Theorem 3.13 (iii) und Theorem 3.14 vollenden. Nach dem obigen Lemma ist in den verbliebenen Fällen stets $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ echt in $(\ker A_2)_{\mathrm{L}}$ enthalten, somit ist die Kodimension von $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ in $(\ker A_2)_{\mathrm{L}}$ mindestens gleich Eins. Wegen (3.75) und $\dim \Lambda_{\mathrm{L}}^0 = 1$ ist sie aber andererseit höchstens gleich Eins. Folglich ist die Summe (3.75) direkt. Da sowohl ${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ als auch ${}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ quadratische Algebren sind, ist

$${}_{\mathrm{u}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}/(\eta^0) \cong \Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes}/(\mathcal{S}(\mathcal{R}) + \langle\eta^0\rangle) \cong \Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes}/(\ker A_2)_{\mathrm{L}} \cong {}_{\mathrm{s}}\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}.$$

Weil sowohl ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}/(\eta^0)$ als auch ${}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$ *freie* $\mathcal{A}$-Moduln sind, folgt ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}/(\eta^0) \cong {}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$. Wegen der Kongruenz $\theta\wedge\theta \equiv \mathfrak{r}^{-1}\eta^0 \pmod{\mathcal{S}(\mathcal{R})}$, vergleiche (3.67) und beachte $\eta^+, \eta^- \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, erhalten wir schließlich ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}/(\theta\wedge\theta) \cong {}_{\mathrm{s}}\Gamma^{\wedge}$.
Dass $\theta\wedge\theta$ mit allen Elementen aus $\mathcal{A}$ vertauscht, folgt aus $\theta\wedge\theta = \mathfrak{r}^{-1}\eta^0$ in ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ und (3.70).
Wegen Lemma 3.10 (iii) erhält man ferner, dass ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ ein innerer Kalkül ist und $\theta\wedge\theta$ in ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^{\wedge}$ zentral ist. Damit sind die Beweise abgeschlossen.

# Kapitel 4

# $\sigma$-Metriken, Kontraktionen und Laplace-Beltrami-Operatoren

In diesem Kapitel übertragen wir einige wichtige differentialgeometrische Begriffe, wie Metrik, Verjüngung, Kodifferential und Laplace-Beltrami-Operator auf den Quantengruppenfall. In der Literatur gibt es die verschiedensten Methoden, den Begriff der Metrik einzuführen, man denke an die französische Schule um Madore, Dubois-Violette [30, 31, 68], an Arbeiten von Dimakis und Müller-Hoissen [26] oder den Artikel von Meyer [77]. Am geeignetsten für die Bestimmung der de-Rham-Kohomologien der bikovarianten Standarddifferentialkalküle erwies sich aber der von Heckenberger [41] gewählte Weg. Wir führen daher hier diese Begriffe ein.
Im gesamten Kapitel bezeichnen wir mit $\Gamma^\wedge$ stets Woronowicz' äußere Algebra zu einem gegebenen Hopf-Bimodul $\Gamma$.

## 4.1 $\sigma$-Metriken und Kontraktionen

### 4.1.1 $\sigma$-Metriken

Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra, und $\Gamma_+$ und $\Gamma_-$ seien (endlichdimensionale) Hopf-Bimoduln über $\mathcal{A}$.

**Definition 4.1** Eine lineare Abbildung $g\colon \Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_- + \Gamma_- \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+ \to \mathcal{A}$ heißt $\sigma$-*Metrik* des Paares $(\Gamma_+, \Gamma_-)$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $g$ ist ein Bimodulhomomorphismus,

(ii) $g$ ist nicht ausgeartet, d. h., aus $g(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = 0$ für alle $\eta \in \Gamma_{-\tau}$ folgt $\xi = 0$ und aus $g(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = 0$ für alle $\xi \in \Gamma_\tau$ folgt $\eta = 0$.

(iii) $g\sigma = g$ ($\sigma$-Symmetrie).

(iv) Für alle $\tau \in \{+, -\}$ gilt

$$g_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = g_{23}, \quad g_{23}\sigma_{12}\sigma_{23} = g_{12} \tag{4.1}$$

im Raum $\Gamma_\tau \otimes_{\mathcal{A}} \overline{\Gamma}$ bzw. $\overline{\Gamma} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_\tau$, wobei $\overline{\Gamma} = \Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_- + \Gamma_- \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+$.

**Bemerkung 4.1** (i) Eine Eigenschaft der klassischen Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ihre Symmetrie. Den Kotangentialbündeln über der Gruppenmannigfaltigkeit $G$ entsprechen im Quantenfall die Hopf-Bimoduln über $\mathcal{O}(G_q)$. Wir haben jedoch schon im Abschnitt 2.2.2 gesehen, dass die einfache Vertauschung zweier Formen aus gegebenen Hopf-Bimoduln kein wohldefinierter Morphismus von Hopf-Bimoduln ist. Vielmehr tritt die Zopfung $\sigma$ in natürlicher Weise an die Stelle der Vertauschung. Dies motiviert die Eigenschaft der $\sigma$-Symmetrie (iii).
(ii) Einfache Betrachtungen zeigen, dass es für die Standardkalküle auf $\mathrm{SL}_q(N)$ und $\mathrm{GL}_q(N)$ keine Metrik der Form $g\colon \mathit{\Gamma} \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma} \to \mathcal{A}$ gibt, die (iv) mit $\mathit{\Gamma}_+ = \mathit{\Gamma}_- = \mathit{\Gamma}$ erfüllt. Sehr wohl gibt es aber $\sigma$-Metriken mit $\mathit{\Gamma}_+ = \mathit{\Gamma}_{+,z}$ und $\mathit{\Gamma}_- = \mathit{\Gamma}_{-,z}$. □

Eine $\sigma$-Metrik $g$ heißt *linkskovariant* bzw. *rechtskovariant*, falls

$$(\mathrm{id} \otimes g)\Delta_{\mathrm{L}} = \Delta g, \qquad \text{bzw.} \qquad (g \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}} = \Delta g \tag{4.2}$$

in $\overline{\mathit{\Gamma}}$ gilt. Wir nennen die $\sigma$-Metrik $g$ *bikovariant*, falls sie sowohl links- als auch rechtskovariant ist. In dieser Arbeit betrachten wir nur bikovariante $\sigma$-Metriken.

**Bemerkung 4.2** Der Begriff der bikovarianten $\sigma$-Metrik ist sehr ähnlich zu den linksdualen und rechtsdualen Hopf-Bimoduln, vergleiche auch Abschnitt 2.2.3. Letzterer ist aber etwas schwächer, da die vollständige $\sigma$-Symmetrie bei dualen Hopf-Bimoduln nicht gewährleistet ist. Genauer, durch die Identifizierung von links- und rechtsdualen Hopf-Bimoduln lässt sich zwar eine Paarung $g\colon \mathit{\Gamma}_- \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma}_+ + \mathit{\Gamma}_+ \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma}_- \to \mathcal{A}$ konstruieren, die (i), (ii), (iv) erfüllt und bikovariant ist, jedoch gilt für diese Paarung im Allgemeinen nicht $g\sigma = g$. □

Mitunter lassen wir das Tensorzeichen weg und schreiben einfach $g(\xi a, \zeta) = g(\xi, a\zeta) = g(\xi a \otimes_{\mathcal{A}} \zeta)$ für alle $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathit{\Gamma}_\tau$ und $\zeta \in \mathit{\Gamma}_{-\tau}$.
Ist $g\colon \mathit{\Gamma}_\tau \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma}_{-\tau} \to \mathcal{A}$, $\tau \in \{+,-\}$ ein Homomorphismus von Bimoduln, dann gilt im Tensorprodukt-Bimodul $\bigotimes_{m=1}^{k} \mathit{\Lambda}_m$ mit $\mathit{\Lambda}_m \in \{\mathit{\Gamma}_+, \mathit{\Gamma}_-\}$ die Gleichung

$$g_{i,i+1}\, g_{j,j+1} = g_{j-2,j-1}\, g_{i,i+1} \quad \text{für } k > j > i+1 \tag{4.3}$$

Zur Begründung: Verjüngt man zunächst an der vorderen Stelle $(i, i+1)$, so verschiebt sich das hintere Indexpaar $(j, j+1)$ um zwei Stellen nach vorn. Die einzige Bedingung für die Wohldefiniertheit der obigen Abbildungen ist, dass an den Stellen $(i, i+1)$ und $(j, j+1)$ jeweils Bimoduln $\mathit{\Gamma}_\tau$ mit unterschiedlichen Vorzeichen stehen. Genauso ergibt sich

$$g_{i,i+1}\sigma_{j,j+1} = \sigma_{j-2,j-1}g_{i,i+1} \quad \text{und} \quad \sigma_{i,i+1}g_{j,j+1} = g_{j,j+1}\sigma_{i,i+1}, \quad j > i+1. \tag{4.4}$$

Wir setzten nun $g$ rekursiv zu einem Endomorphismus $\widetilde{g}$ des Hopf-Bimoduls $\mathit{\Gamma}_\tau^{\otimes} \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma}_{-\tau}^{\otimes}$, $\tau \in \{+,-\}$ fort:

$$\begin{gathered} \widetilde{g}(\xi, a) = \xi a, \quad \widetilde{g}(a, \zeta) = a\zeta, \\ \widetilde{g}(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho, \eta \otimes_{\mathcal{A}} \zeta) = \widetilde{g}(\xi\, g(\rho, \eta), \zeta) \end{gathered} \tag{4.5}$$

mit $\xi \in \mathit{\Gamma}_\tau^{\otimes}$, $\rho \in \mathit{\Gamma}_\tau$, $\eta \in \mathit{\Gamma}_{-\tau}$, $\zeta \in \mathit{\Gamma}_{-\tau}^{\otimes}$ und $a \in \mathcal{A}$. Wir schreiben $\widetilde{g}_{n,k}$ für $\widetilde{g}$, wenn das Argument von $\widetilde{g}$ in $\mathit{\Gamma}_\tau^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathit{\Gamma}_{-\tau}^{\otimes k}$ liegt. Sind $\xi$ und $\zeta$ vom Grad $n$ bzw. $k$ mit $n \geq k$, dann gilt $\widetilde{g}(\xi, \zeta) \in \mathit{\Gamma}_\tau^{\otimes n-k}$.

Da $g$ ein Morphismus von Bimoduln ist, ist $\widetilde{g}$ ein wohldefinierter Morphismus. Die Abbildung $\widetilde{g}$ ist links-, rechts- bzw. bikovariant, falls die Abbildung $g$ es war.
Im Folgenden setzten wir stets voraus, dass $\Gamma_+$ und $\Gamma_-$ Hopf-Bimoduln sind und dass $g$ eine bikovariante $\sigma$-Metrik des Paares $(\Gamma_+, \Gamma_-)$ ist. Wir beginnen mit einer sehr einfachen Folgerung aus der rekursiven Definition von $\widetilde{g}$.

**Lemma 4.1** (i) *Es seien $\rho, \xi \in \Gamma_\tau^\otimes$ und $\zeta, \eta \in \Gamma_{-\tau}^\otimes$. Dann gilt*

$$\widetilde{g}(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \zeta \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = \widetilde{g}(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \widetilde{g}(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \zeta) \otimes_{\mathcal{A}} \eta).$$

(ii) *Es seien $T$ und $T'$ Bimodul-Endomorphismen von $\Gamma_\tau^{\otimes i}$ bzw. $\Gamma_{-\tau}^{\otimes i}$ und $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ mit $i + j \leq k, l$. Ferner gelte $\widetilde{g}_{i,i}(T \otimes \mathrm{id}^{\otimes i}) = \widetilde{g}_{i,i}(\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes T')$. Dann gilt auch*

$$\widetilde{g}_{k,l}(\mathrm{id}^{\otimes k-i-j} \otimes T \otimes \mathrm{id}^{\otimes j} \otimes \mathrm{id}^{\otimes l}) = \widetilde{g}_{k,l}(\mathrm{id}^{\otimes k} \otimes \mathrm{id}^{\otimes j} \otimes T' \otimes \mathrm{id}^{\otimes l-i-j}).$$

*Beweis*. (i) Für homogene Elemente $\xi$ und $\zeta$ vom Grad $1$ ist die Behauptung erfüllt. Für homogene Elemente höheren Grades zeigt man die Behauptung durch vollständige Induktion über den Homogenitätsgrad von $\xi$ und $\zeta$.
(ii) Es seien $\xi_{k-i-j}$, $\xi_i$ und $\xi_j$ homogene Elemente aus $\Gamma_\tau^\otimes$ und $\eta_j$, $\eta_i$ und $\eta_{l-i-j}$ homogene Elemente aus $\Gamma_{-\tau}^\otimes$, wobei der Index den jeweiligen Grad angibt. Dann berechnet man nach (i), wegen $a_j := \widetilde{g}(\xi_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_j) \in \mathcal{A}$ und aufgrund der Voraussetzung

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}_{k,l}(\xi_{k-i-j} \otimes_{\mathcal{A}} T(\xi_i) \otimes_{\mathcal{A}} \xi_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_i \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{l-i-j}) \\
&\qquad = \widetilde{g}\big(\xi_{k-i-j} \otimes_{\mathcal{A}} T(\xi_i) \otimes_{\mathcal{A}} \widetilde{g}(\xi_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_j) \otimes_{\mathcal{A}} \eta_i \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{l-i-j}\big) \\
&\qquad = \widetilde{g}\big(\xi_{k-i-j} \otimes_{\mathcal{A}} \widetilde{g}(T(\xi_i) a_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_i) \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{l-i-j}\big) \\
&\qquad = \widetilde{g}\big(\xi_{k-i-j} \otimes_{\mathcal{A}} \widetilde{g}(\xi_i \otimes_{\mathcal{A}} a_j T'(\eta_i)) \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{l-i-j}\big) \\
&\qquad = \widetilde{g}(\xi_{k-i-j} \otimes_{\mathcal{A}} \xi_i \otimes_{\mathcal{A}} \xi_j \otimes_{\mathcal{A}} \eta_j \otimes_{\mathcal{A}} T'(\eta_i) \otimes_{\mathcal{A}} \eta_{l-i-j}).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. ∎

Das nächste Lemma, es beinhaltet die Symmetrie von $\sigma$ bezüglich $\widetilde{g}$, ist bedeutsam für die folgenden Konstruktionen.

**Lemma 4.2** *Es seien $i, k, l$ positive ganze Zahlen mit $1 \leq i < k, l$. Dann gilt*

$$\widetilde{g}_{k,l}(\sigma^\pm_{k-i,k-i+1}, \mathrm{id}^{\otimes l}) = \widetilde{g}_{k,l}(\mathrm{id}^{\otimes k}, \sigma^\pm_{i,i+1}). \tag{4.6}$$

*Beweis*. Wegen (4.5) und Lemma 4.1 (ii) reicht es, die Behauptung für $i = 1$ und $k = l = 2$ zu zeigen. In diesem Falle ist $\widetilde{g} = g_{12}g_{23}$. Mit $i = 1$ und $j = 3$ folgt aus (4.3) die Gleichung $g_{12}g_{34} = g_{12}g_{12}$. In der zweiten und vierten Gleichung der folgenden Umformungen benutzen wir die Bedingung (iv) in der Definition der $\sigma$-Metrik, siehe (4.1). Wir erhalten dann

$$\widetilde{g}\sigma^\pm_{12} = g_{12}g_{23}\sigma^\pm_{12} = g_{12}g_{12}\sigma^\mp_{23} = g_{12}g_{34}\sigma^\mp_{23} = g_{12}g_{23}\sigma^\pm_{34} = \widetilde{g}\sigma^\pm_{34}. \tag{4.7}$$

∎

Es sei $g$ ein Morphismus von Hopf-Bimoduln $g\colon \Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_- + \Gamma_- \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+ \to \mathcal{A}$. Aus der Theorie der Hopf-Bimoduln folgt leicht, dass $g$ genau dann nicht ausgeartet ist, wenn die Einschränkung von $g$ auf den Raum der linksinvarianten Elemente von $\Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_- + \Gamma_- \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+$ nicht ausgeartet ist. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $g$ ist nicht ausgeartet.

(ii) Die Einschränkung von $g$ auf den Raum $(\Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_- + \Gamma_- \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+)_{\mathrm{L}}$ ist nicht ausgeartet.

(iii) Die Matrix von $g$ bezüglich einer beliebigen Basis von $\Gamma_{+,\mathrm{L}}$ und $\Gamma_{-,\mathrm{L}}$ ist invertierbar.

### 4.1.2 Kontraktionsoperatoren

**Definition 4.2** Als *Kontraktionen* (bezüglich der $\sigma$-Metrik $g$) bezeichnen wir die Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm\colon \Gamma_\tau^{\otimes k} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-\tau}^{\otimes l} \to \Gamma_{\tau'}^{\otimes |k-l|}$ mit $\tau \in \{+,-\}$ und $\tau' = \tau$ für $k \geq l$ sowie $\tau' = -\tau$ für $k < l$, die gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \langle\xi,\zeta\rangle_\pm &:= \widetilde{g}(B^\pm_{k-l,l}\,\xi\,,\ A^\pm_l\zeta) \quad \text{für} \quad k \geq l,\\ \langle\xi,\zeta\rangle_\pm &:= \widetilde{g}(A^\pm_k\,\xi\,,\ B^\pm_{k,l-k}\zeta) \quad \text{für} \quad k < l. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Wie schon $g$, sind auch die Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ Homomorphismen von Hopf-Bimoduln. Sind sowohl $k$ als auch $l$ kleiner als 2, hängen die Kontraktionen nicht mehr vom Vorzeichen $\pm$ ab, und wir lassen es gelegentlich weg: $\langle\xi,\zeta\rangle_+ = \langle\xi,\zeta\rangle_- =: \langle\xi,\zeta\rangle$. Die nächste Eigenschaft besagt, dass der Antisymmetrisator $A^\pm_i$ bezüglich $\widetilde{g}$ symmetrisch ist.

**Lemma 4.3** *Für nichtnegative ganze Zahlen $i, j, k$ und $l$ mit $1 \leq i+j \leq k, l$ gilt*

$$\widetilde{g}_{k,l}\big(\mathrm{id}^{\otimes k-i-j} \otimes A^\pm_i \otimes \mathrm{id}^{\otimes j+l}\big) = \widetilde{g}_{k,l}\big(\mathrm{id}^{\otimes k+j} \otimes A^\pm_i \otimes \mathrm{id}^{\otimes l-i-j}\big).$$

*Beweis*. Wegen Lemma 4.1 genügt es zu zeigen, dass $\widetilde{g}(A^\pm_i \otimes \mathrm{id}^{\otimes i}) = \widetilde{g}(\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes A^\pm_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen Lemma 4.2 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leq i$:

$$\widetilde{g}_{i+1,i+1}(\sigma^\pm_1 \cdots \sigma^\pm_n \otimes \mathrm{id}^{\otimes i+1}) = \widetilde{g}_{i+1,i+1}(\mathrm{id}^{\otimes i+1} \otimes \sigma^\pm_{i-n+1} \cdots \sigma^\pm_i). \tag{4.9}$$

Wir führen nun den Beweis mit vollständiger Induktion über $i$. Für $i = 2$ folgt die Behauptung sofort aus Lemma 4.2. Möge sie für $i$ erfüllt sein. Dann gilt nach (3.8) $A^\pm_{i+1} = (\mathrm{id} \otimes A^\pm_i)B^\pm_{1,i}$. Somit ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung, mit (4.9) und erneut mit (3.8)

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_{i+1,i+1}(A^\pm_{i+1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes i+1}) &= \widetilde{g}\big((\mathrm{id} \otimes A^\pm_i)B^\pm_{1,i} \otimes \mathrm{id}^{\otimes i+1}\big)\\ &= \widetilde{g}\left(\textstyle\sum_{n=0}^i (-1)^n \sigma^\pm_1 \cdots \sigma^\pm_n \otimes A^\pm_i \otimes \mathrm{id}\right)\\ &= \widetilde{g}\left(\mathrm{id}^{\otimes i+1} \otimes \textstyle\sum_{n=0}^i (-1)^n \sigma^\pm_{i-n+1} \cdots \sigma^\pm_i (A^\pm_i \otimes \mathrm{id})\right)\\ &= \widetilde{g}\left(\mathrm{id}^{\otimes i+1} \otimes A^\pm_{i,1}(A^\pm_i \otimes \mathrm{id})\right)\\ &= \widetilde{g}\left(\mathrm{id}^{\otimes i+1} \otimes A^\pm_{i+1}\right). \end{aligned}$$

∎

Eine wichtige Folgerung aus dem obigen Lemma ist die Tatsache, dass die Kontraktion $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ „faktorisiert“ werden kann zu Kontraktionsabbildungen der äußeren Algebra $\Gamma^\wedge = {}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$.

**Lemma 4.4** (i) *Für $k \geq l$, $\zeta_k \in \Gamma_\tau^{\otimes k}$ und $\zeta_l \in \Gamma_{-\tau}^{\otimes l}$ gilt*

$$\begin{aligned} A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_l, \zeta_k \rangle_{\pm} &= \widetilde{g}_{l,k}(\zeta_l \otimes A_k^{\pm}\zeta_k), \\ A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_k, \zeta_l \rangle_{\pm} &= \widetilde{g}_{k,l}(A_k^{\pm}\zeta_k \otimes \zeta_l). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(ii) *Die über* (4.8) *definierte Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pm}$ ist auf den Faktorräumen $\Gamma_\tau^{\wedge k} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-\tau}^{\wedge l} \to \Gamma_{\tau'}^{\wedge |k-l|}$ wohldefiniert, dabei ist $\tau' = \tau$, falls $k \geq l$ und $\tau' = -\tau$, falls $k < l$.*

*Beweis*. (i) Wir zeigen nur die erste Gleichung. Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft analog. Nach der Definition der Kontraktion und wegen Lemma 4.3 gilt

$$\begin{aligned} A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_l, \zeta_k \rangle_{\pm} &= A_{k-l}^{\pm}\widetilde{g}_{k,l}(A_l^{\pm}\zeta_l \otimes_{\mathcal{A}} B_{l,k-l}^{\pm}\zeta_k) \\ &= A_{k-l}^{\pm}\widetilde{g}_{l,k}(\zeta_l \otimes_{\mathcal{A}} (A_l^{\pm} \otimes \mathrm{id}^{\otimes k-l})B_{l,k-l}\zeta_k). \end{aligned}$$

Wegen der Indexverschiebung (4.4) gilt $A_{k-l}^{\pm}\widetilde{g}_{l,k} = \widetilde{g}_{l,k}(\mathrm{id}^{\otimes 2l} \otimes A_{k-l}^{\pm})$. Benutzt man dies, kann man fortfahren:

$$\begin{aligned} A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_l, \zeta_k \rangle_{\pm} &= \widetilde{g}_{l,k}(\zeta_l \otimes_{\mathcal{A}} (A_l^{\pm} \otimes A_{k-l}^{\pm})B_{l,k-l}^{\pm}\zeta_k) \\ &= \widetilde{g}_{l,k}(\zeta_l \otimes_{\mathcal{A}} A_k^{\pm}\zeta_k). \end{aligned}$$

(ii) Man beachte, dass $\ker A_k^+ = \ker A_k^-$ gilt. Wir müssen zeigen, dass die Kontraktion $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pm}$ das Ideal $\ker A_k \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-\tau}^{\otimes l} + \Gamma_\tau^{\otimes k} \otimes_{\mathcal{A}} \ker A_l$ in $\ker A_{|k-l|}$ abbildet. Sei zunächst $k \geq l$. Für $\zeta_k \in \ker A_k^{\pm}$ und $\zeta_l \in \Gamma_{-\tau}^{\otimes l}$ gilt dann nach (4.10)

$$A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_k, \zeta_l \rangle_{\pm} = \widetilde{g}_{k,l}(A_k^{\pm}\zeta_k \otimes_{\mathcal{A}} \zeta_l) = 0.$$

Sei nun $\zeta_k \in \Gamma_\tau^{\otimes k}$ und $\zeta_l \in \ker A_l$, so erhält man wie oben unter Verwendung von (3.8)

$$\begin{aligned} A_{k-l}^{\pm}\langle \zeta_k, \zeta_l \rangle_{\pm} &= \widetilde{g}_{k,l}(A_k^{\pm}\zeta_k \otimes_{\mathcal{A}} \zeta_l) \\ &= \widetilde{g}_{k,l}((A_l^{\pm} \otimes A_{k-l}^{\pm})B_{l,k-l}^{\pm}\zeta_k \otimes_{\mathcal{A}} \zeta_l) \\ &= \widetilde{g}_{k,l}((\mathrm{id}^{\otimes l} \otimes A_{k-l}^{\pm})B_{l,k-l}^{\pm}\zeta_k \otimes_{\mathcal{A}} A_l^{\pm}\zeta_l) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pm}$ wohldefiniert. Für $k \leq l$ verlaufen die Beweise analog. ∎

Wir fassen hier einige wichtige Eigenschaften der Kontraktion zusammen, die in der Arbeit [41, Lemmata 4.3, 4.4 und 6.2] gezeigt sind.

**Lemma 4.5** *Es seien $\xi_i \in \Gamma_{\tau_i}^{\wedge k_i}$, $i = 0, 1, 2$ mit $\tau_1 = \tau_2 = -\tau_0$ und $k_1 + k_2 \leq k_0$. Dann erfüllt die Kontraktion die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{aligned} &\langle \xi_1, \langle \xi_2, \xi_0 \rangle_{\pm} \rangle_{\pm} = \langle \xi_1 \wedge \xi_2, \xi_0 \rangle_{\pm}, \quad \langle \langle \xi_0, \xi_1 \rangle_{\pm}, \xi_2 \rangle_{\pm} = \langle \xi_0, \xi_1 \wedge \xi_2 \rangle_{\pm}, \\ &\langle \xi_1, \langle \xi_0, \xi_2 \rangle_{\pm} \rangle_{\pm} = \langle \langle \xi_1, \xi_0 \rangle_{\pm}, \xi_2 \rangle_{\pm}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

*Beweis*. Wir verwenden durchweg die Tatsache, dass $\zeta = 0$ in $\Gamma^{\wedge k}$ genau dann, wenn $A_k(\zeta) = 0$ in $\Gamma^{\otimes k}$. Aus Lemma 4.3 und Lemma 4.4 (i) erhalten wir im Falle der ersten Gleichung mit den Repräsentanten $\zeta_i \in \Gamma_{\tau_i}^{\otimes k_i}$ von $\xi_i$, $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} A^{\pm}_{k_0-k_1-k_2}(\langle \zeta_1, \langle \zeta_2, \zeta_0\rangle_\pm\rangle_\pm) &= \widetilde{g}(\zeta_1, A^{\pm}_{k_0-k_2}(\langle \zeta_2, \zeta_0\rangle_\pm)) \\ &= \widetilde{g}(\zeta_1, \widetilde{g}(\zeta_2, A^{\pm}_{k_0}\zeta_0)) \\ &= \widetilde{g}(\zeta_1 \otimes_{\mathcal{A}} \zeta_2, A^{\pm}_{k_0}\zeta_0) \\ &= A^{\pm}_{k_0-k_1-k_2}(\langle \zeta_1 \otimes_{\mathcal{A}} \zeta_2, \zeta_0\rangle_\pm). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung zeigt man analog.
Zum Beweis der letzten Gleichung benutzen wir dieselbe Argumentation. Die linke Seite ergibt

$$A^{\pm}_{k_0-k_1-k_2}\langle \zeta_1, \langle \zeta_0, \zeta_2\rangle_\pm\rangle_\pm = \widetilde{g}(\zeta_1, A^{\pm}_{k_0-k_2}\langle \zeta_0, \zeta_2\rangle_\pm) = \widetilde{g}(\zeta_1, \widetilde{g}(A^{\pm}_{k_0}\zeta_0, \zeta_2)),$$

während wir für die rechte Seite den folgenden Ausdruck erhalten:

$$A^{\pm}_{k_0-k_1-k_2}\langle\langle \zeta_1, \zeta_0\rangle_\pm, \zeta_2\rangle_\pm = \widetilde{g}(A^{\pm}_{k_0-k_1}\langle \zeta_1, \zeta_0\rangle_\pm, \zeta_2) = \widetilde{g}(\widetilde{g}(\zeta_1, A^{\pm}_{k_0}\zeta_0), \zeta_2).$$

Nach der Definition von $\widetilde{g}$ und wegen $k_1 + k_2 \leq k_0$ stimmen diese beiden Ausdrücke überein.

∎

Zur Berechnung der Kontraktion sind die folgenden beiden Rekursionsformeln nützlich.

**Lemma 4.6** *Für alle $\xi_k \in \Gamma_\tau^{\wedge k}$, $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau}^{\wedge k}$, $k \geq 1$, $\xi \in \Gamma_\tau$, $\rho \in \Gamma_{-\tau}$ mit $\tau \in \{+, -\}$ gelten die folgenden beiden Gleichungen*

$$\langle \xi_k \wedge \xi, \rho\rangle_\pm = \xi_k\langle \xi, \rho\rangle_\pm - \langle \xi_k, \rho^{\mp}_{(1)}\rangle_\pm \wedge \rho^{\mp}_{(2)}, \tag{4.12}$$

$$\langle \xi, \rho \wedge \xi'_k\rangle_\pm = \langle \xi, \rho\rangle_\pm \xi'_k - \rho^{\mp}_{(1)} \wedge \langle \rho^{\mp}_{(2)}, \xi'_k\rangle_\pm, \tag{4.13}$$

*wobei $\sigma^{\mp}(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) = \rho^{\mp}_{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \rho^{\mp}_{(2)} \in \Gamma_{-\tau} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_\tau$.*

*Beweis*. Für $k = 1$ lautet die linke Seite der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \wedge \xi, \rho\rangle_\pm &= g_{23}\big((\xi_1 \otimes_{\mathcal{A}} \xi - \sigma^{\pm}(\xi_1 \otimes_{\mathcal{A}} \xi)) \otimes_{\mathcal{A}} \rho\big) \\ &= g_{23}(\xi_1 \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) - g_{12}\sigma^{\mp}_{23}(\xi_1 \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho). \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung benutzten wir (4.1). Wenn $k \geq 2$, so benutzen wir (3.10) und schließen

$$\begin{aligned} \langle \xi_k \wedge \xi, \rho\rangle_\pm &= \widetilde{g}(B^{\pm}_{k,1}(\xi_k \otimes_{\mathcal{A}} \xi) \otimes_{\mathcal{A}} \rho) \\ &= g_{k+1,k+2}(\xi_k \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho - \sigma^{\pm}_{k,k+1}(B^{\pm}_{k-1,1} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id}^{\otimes 2})(\xi_k \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho)) \\ &= \xi_k \otimes_{\mathcal{A}} g(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) - g_{k,k+1}\sigma^{\mp}_{k+1,k+2}(B^{\pm}_{k-1,1} \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{id}^{\otimes 2})(\xi_k \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) \\ &= \xi_k \otimes_{\mathcal{A}} g(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) - g_{k,k+1}(B^{\pm}_{k-1,1} \otimes_{\mathcal{A}} \sigma^{\mp})(\xi_k \otimes_{\mathcal{A}} \xi \otimes_{\mathcal{A}} \rho) \\ &= \xi_k\langle \xi, \rho\rangle_\pm - \langle \xi_k, \rho^{\mp}_{(1)}\rangle_\pm \wedge \rho^{\mp}_{(2)}. \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Gleichung ist analog. ∎

Wir fahren mit einigen Bemerkungen zur Nichtausgeartetheit der Kontraktion $\langle \cdot, \cdot\rangle_\pm$ fort.

**Satz 4.7** *Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm : \Gamma_\tau^{\wedge k} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-\tau}^{\wedge k} \to \mathcal{A}$, $\tau \in \{+,-\}$, $k \geq 1$ und ihre Einschränkung auf die linksinvarianten Teilräume $\Gamma_{\tau,\mathrm{L}}^{\wedge k}$ und $\Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\wedge k}$ sind nicht ausgeartet.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass die Abbildung $\widetilde{g} : \Gamma_\tau^{\otimes k} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-\tau}^{\otimes k} \to \mathcal{A}$ und deren Einschränkung auf $\Gamma_{\tau,\mathrm{L}}^{\otimes k} \otimes \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\otimes k}$ nicht ausgeartet sind. Für $k = 1$ ist die Aussage wahr, da $g$ per definitionem nicht ausgeartet ist, und es gilt $\widetilde{g} = g$. Nun gelte die Behauptung für ein $k \geq 1$, und es sei $\xi_{k+1} \in \Gamma_\tau^{\otimes k+1}$. Dann existieren endlich viele $k$-Formen $\xi^i \in \Gamma_\tau^{\otimes k}$ und linear unabhängige 1-Formen $\rho_i \in \Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$ derart, dass $\xi_{k+1} = \sum_i \rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \xi^i$. Angenommen, es ist $\widetilde{g}_{k+1,k+1}(\xi_{k+1} \otimes_{\mathcal{A}} \xi'_k \otimes_{\mathcal{A}} \rho') = 0$ für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\otimes k}$ und $\rho' \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}$. Dann folgt aus der Definition von $\widetilde{g}$, dass $\widetilde{g}_{k+1,k+1}(\rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \xi^i \otimes_{\mathcal{A}} \xi'_k \otimes_{\mathcal{A}} \rho') = g(\rho_i \widetilde{g}_{k,k}(\xi^i, \xi'_k) \otimes_{\mathcal{A}} \rho') = 0$ für alle $\rho' \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}$. Da $g$ ein Homomorphismus von rechten $\mathcal{A}$-Moduln ist, gilt die letzte Gleichung sogar für alle $\rho' \in \Gamma_{-\tau}$. Da $g$ nicht ausgeartet ist, gilt $\rho_i \widetilde{g}(\xi^i \otimes_{\mathcal{A}} \xi'_k) = 0$, und da die 1-Formen $\rho_i \in \Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$ linear unabhängig sind, erhalten wir $\widetilde{g}_{k,k}(\xi^i \otimes_{\mathcal{A}} \xi'_k) = 0$ für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\otimes k}$. Da $\widetilde{g}$ ein Homomorphismus von rechten $\mathcal{A}$-Moduln ist, erhalten wir sogar $\widetilde{g}(\xi^i, \xi'_k) = 0$ für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau}^{\otimes k}$. Die Induktionsvoraussetzung liefert uns dann $\xi^i = 0$ und folglich $\xi_{k+1} = \rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \xi^i = 0$.
Nun zeigen wir die Behauptung des Satzes. Es seien $\xi \in \Gamma_\tau^{\wedge k}$ und $\xi_0 \in \Gamma_\tau^{\otimes k}$ ein Repräsentant von $\xi$. Wir setzen $\langle \xi, \xi'_k \rangle_\pm = 0$ für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\wedge k}$ voraus. Das heißt, $\widetilde{g}(A_k^\pm \xi_0 \otimes_{\mathcal{A}} \xi'_k) = 0$ für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}^{\otimes k}$. Da $\widetilde{g}$ ein Homomorphismus von rechten $\mathcal{A}$-Moduln ist, gilt die letzte Gleichung sogar für alle $\xi'_k \in \Gamma_{-\tau}^{\otimes k}$. Im ersten Teil des Beweises sahen wir, dass dann $A_k^\pm \xi_0 = 0$ gilt. Folglich ist $\xi = 0$.
Die Nichtausgeartetheit im zweiten Argument von $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ zeigt man analog. ∎

**Folgerung 4.8** *Es sei $g$ eine linkskovariante $\sigma$-Metrik des Paares $(\Gamma_+, \Gamma_-)$. Dann gilt für alle $k \geq 0$, dass $\dim \Gamma_{+,\mathrm{L}}^{\wedge k} = \dim \Gamma_{-,\mathrm{L}}^{\wedge k}$.*

**Lemma 4.9** *Für alle $a \in \mathcal{A}$, $\rho \in \Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$ und $\rho' \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{L}}$ gilt:*

$$h\langle a\rho, \rho' \rangle_\pm = h\langle \rho a, \rho' \rangle_\pm = h\langle \rho, a\rho' \rangle_\pm = h(a)\langle \rho, \rho' \rangle_\pm. \tag{4.14}$$

*Beweis.* Es sei $\{\theta_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ eine Basis des Vektorraumes $\Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$ der linksinvarianten Formen. Es genügt, die Behauptung für $\rho = \theta_i$ zu beweisen. Wegen der Linkskovarianz der $\sigma$-Metrik folgt dann $\langle \rho, \rho' \rangle_\pm \in \mathbb{C}1$, und daher gilt $h\langle a\rho, \rho' \rangle_\pm = h(a\langle \rho, \rho' \rangle_\pm) = h(a)\langle \rho, \rho' \rangle_\pm$.
Aufgrund von Theorem 2.11 existieren lineare Funktionale $f^i_j$, $i, j = 1, \ldots, m$ mit $\theta_i a = a_{(1)} f^i_j(a_{(2)})\theta_j$ und $f^i_j(1) = \delta^i_j$. Wegen $\langle \theta_j, \rho' \rangle_\pm \in \mathbb{C}\,1$ und der Eigenschaft des Haarfunktionals (3.42) gilt daher

$$\begin{aligned} h\langle \theta_i a, \rho' \rangle_\pm &= h(a_{(1)}) f^i_j(a_{(2)}) \langle \theta_j, \rho' \rangle_\pm = f^i_j(h(a_{(1)})a_{(2)}) \langle \theta_j, \rho' \rangle_\pm \\ &= f^i_j(h(a) \cdot 1) \langle \theta_j, \rho' \rangle_\pm = h(a) \langle \theta_i, \rho' \rangle_\pm. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Wegen der $\sigma$-Symmetrie der Metrik erhalten wir aus (4.14) insbesondere für die biinvariante 1-Form $\omega_0^{-\tau} \in \Gamma_{-\tau,\mathrm{Inv}}$ und alle $\xi \in \Gamma_\tau$, $\xi = a_i \xi_i$ mit $a_i \in \mathcal{A}$ und $\xi_i \in \Gamma_{\tau,\mathrm{L}}$:

$$h\langle \xi, \omega_0^{-\tau} \rangle_\pm = h(a_i \langle \xi_i, \omega_0^{-\tau} \rangle_\pm) = h(a_i)\langle \omega_0^{-\tau}, \xi_i \rangle_\pm = h\langle \omega_0^{-\tau}, \xi \rangle_\pm. \tag{4.15}$$

## 4.2 Laplace-Beltrami-Operatoren

Unser wichtigstes Instrument zur Berechnung der de-Rham-Kohomologiegruppen ist der unten definierte Laplace-Beltrami-Operator. Durch ihn kann man in „gutartigen“ Fällen nachweisen, dass die kanonischen Einbettungen der linksinvarianten, rechtsinvarianten und biinvarianten Formenräume in den Raum $\Gamma^\wedge$ aller Differentialformen Quasiisomorphismen sind, d. h., die de-Rham-Kohomologien der oben genannten Räume stimmen überein. Die ursprüngliche Notation aus [41, Abschnitt 6] war für Elemente der Algebra $\mathcal{A}$ gedacht. Wir ändern sie durch ein Vorzeichen im ersten Summanden ab und erhalten einen Operator, der auf ganz $\Gamma^\wedge$ sehr gute Eigenschaften besitzt, etwa die Diagonalisierbarkeit.

**Definition 4.3** Die Abbildungen $\partial_\tau^\pm : \Gamma_\tau^{\wedge k} \to \Gamma_\tau^{\wedge k-1}$, $k \geq 0$, die durch $\partial_\tau^\pm(a) = 0$ für $a \in \mathcal{A}$ und

$$\partial_\tau^\pm \rho = \langle \rho, \omega_0^{-\tau} \rangle_\pm + (-1)^k \langle \omega_0^{-\tau}, \rho \rangle_\pm \tag{4.16}$$

für $\rho \in \Gamma_\tau^{\wedge k}$, $k > 0$, gegeben sind, heißen *Kodifferentialoperatoren* auf $\Gamma_\tau^{\wedge k}$. Die linearen Abbildungen $L_\tau^\pm : \Gamma_\tau^{\wedge k} \to \Gamma_\tau^{\wedge k}$, gegeben durch

$$L_\tau^\pm := -\mathrm{d}_\tau \, \partial_\tau^\pm + \partial_\tau^\pm \, \mathrm{d}_\tau, \tag{4.17}$$

heißen *Laplace-Beltrami-Operatoren* auf $\Gamma_\tau^{\wedge k}$.

Die Elemente des Vektorraumes

$$H^\pm(\Gamma_\tau^{\wedge k}) := \{\rho \in \Gamma_\tau^{\wedge k} \mid L_\tau^\pm \rho = 0\} \tag{4.18}$$

heißen *harmonische $k$-Formen*. Können keine Missverständnisse auftreten, schreiben wir $L^\pm$ anstelle von $L_\tau^\pm$.

Wegen $\partial_\tau^\pm(a) = 0$ stimmen die in [41] definierten Laplace-Beltrami-Operatoren auf $\mathcal{A}$ mit den obigen überein. Es gilt also

$$L_\tau^+ a = L_\tau^- a = -2\mathfrak{s}a + \langle \omega_0^+ a, \omega_0^- \rangle + \langle \omega_0^- a, \omega_0^+ \rangle$$

für $a \in \mathcal{A}$.

Wir benötigen eine Identität für die Zopfung $\sigma$.

**Lemma 4.10** *Es seien $\Gamma$ und $\Lambda$ Hopf-Bimoduln über $\mathcal{A}$. Dann gilt*

$$(\sigma_{\Gamma,\Lambda}^\pm)_k \cdots (\sigma_{\Gamma,\Lambda}^\pm)_1 = \sigma_{\Gamma,\Lambda^{\otimes k}}^\pm \tag{4.19}$$

*als Homomorphismus der Hopf-Bimoduln $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda$ nach $\Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Lambda \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$. Ersetzt man in* (4.19) *$\Lambda^{\otimes k}$ durch seinen Quotienten $\Lambda^{\wedge k}$, dann bleibt* (4.19) *gültig.*

*Beweis*. (a) Die Zopfung $\sigma^\pm$ ist mit dem Tensorprodukt von Hopf-Bimoduln im folgenden Sinne verträglich. Es gilt

$$(\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z) = \sigma_{X,Y\otimes Z}$$

für alle Hopf-Bimoduln $X$, $Y$ und $Z$, vergleiche [113, Theorem 5.2]. Durch Iteration dieser Identität hat man

$$(\sigma_{\Gamma,\Lambda})_k(\sigma_{\Gamma,\Lambda})_{k-1}\cdots(\sigma_{\Gamma,\Lambda})_1 = \sigma_{\Gamma,\Lambda^{\otimes k}}.$$

(b) Da für alle $i = 1,\dots,k-1$ die Zopfrelation $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ erfüllt ist, erhalten wir $\sigma_k\cdots\sigma_1\,\sigma_{i+1} = \sigma_i\,\sigma_k\cdots\sigma_1$. Daher gilt $\sigma_k\cdots\sigma_1\,(A_k)_{2\cdots k+1} = A_k\,\sigma_k\cdots\sigma_1$. Folglich bildet $\sigma_k\cdots\sigma_1$ den Raum $\Gamma\otimes_{\mathcal{A}}\ker A_k$ in den Raum $\ker A_k\otimes_{\mathcal{A}}\Gamma$ ab, und daher ist die Quotientenabbildung $\sigma_k\cdots\sigma_1\colon\Gamma\otimes_{\mathcal{A}}\Lambda^{\wedge k}\to\Lambda^{\wedge k}\otimes_{\mathcal{A}}\Gamma$ wohldefiniert, und es gilt (4.19). Der Beweis für $\sigma^-$ verläuft analog und benutzt zusätzlich die Relation $\ker A_k = \ker A_k^-$. ∎

**Lemma 4.11** *Es seien $\xi_k\in\Gamma_\tau^{\wedge k}$, $\xi\in\Gamma_\tau$, $\rho\in\Gamma_{-\tau}$ und $k\geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\langle\xi\wedge\xi_k,\rho\rangle_\pm &= \xi\wedge\langle\xi_k,\rho\rangle_\pm + (-1)^k\widetilde{g}_{k+1,1}(\sigma^\pm(\xi\otimes_{\mathcal{A}}\xi_k)\otimes_{\mathcal{A}}\rho),\\ \langle\rho,\xi_k\wedge\xi\rangle_\pm &= \langle\rho,\xi_k\rangle_\pm\wedge\xi + (-1)^k\widetilde{g}_{1,k+1}(\rho\otimes_{\mathcal{A}}\sigma^\pm(\xi_k\otimes_{\mathcal{A}}\xi)),\end{aligned}\tag{4.20}$$

*wobei in der ersten Gleichung $\sigma^\pm = \sigma^\pm_{\Gamma_\tau,\Gamma_\tau^{\wedge k}}$ und in der zweiten $\sigma^\pm = \sigma^\pm_{\Gamma_\tau^{\wedge k},\Gamma_\tau}$.*

*Beweis.* Wir zeigen die erste Gleichung. Der Beweis für die zweite verläuft analog. Nach der Definition der Kontraktion (4.8) gilt

$$\langle\xi\wedge\xi_k,\rho\rangle_\pm = \widetilde{g}\big((1-\sigma_k^\pm+\sigma_k^\pm\sigma_{k-1}^\pm-\cdots+(-1)^k\sigma_k^\pm\cdots\sigma_1^\pm)(\xi\otimes_{\mathcal{A}}\xi_k),\rho\big).$$

Da die Endomorphismen $\sigma_k^\pm$, $\sigma_k^\pm\sigma_{k-1}^\pm$, …, $\sigma_k^\pm\cdots\sigma_2^\pm$ alle nicht auf dem ersten Tensorfaktor wirken, können wir die ersten $k$ Summanden zusammenfassen und den letzten abspalten. Mit Lemma 4.10 erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle\xi\wedge\xi_k,\rho\rangle_\pm &= \widetilde{g}\big(\xi\otimes_{\mathcal{A}}(1-\sigma_{k-1}^\pm+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}^\pm\cdots\sigma_1^\pm)\xi_k,\rho\big)+\\ &\quad+(-1)^k\widetilde{g}(\sigma_k^\pm\cdots\sigma_1^\pm(\xi\otimes_{\mathcal{A}}\xi_k),\rho)\\ &= \xi\otimes_{\mathcal{A}}\langle\xi_k,\rho\rangle_\pm+(-1)^k\widetilde{g}(\sigma^\pm(\xi\otimes_{\mathcal{A}}\xi_k),\rho).\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht. ∎

Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ eine der Koordinatenhopfalgebren der Quantengruppen $G_q$ und $(\Gamma_+,\Gamma_-)$ das in Abschnitt 2.3.3 definierte Paar von bikovarianten DKEO auf $\mathcal{A}$.
In [41, Lemma 3.1, Propositionen 3.3 und 3.4] wurde gezeigt, dass die Setzung

$$g(a\omega_{ij}^+,\omega_{kl}^-) = aD_k^j(D^{-1})_i^l \quad\text{und}\quad g(a\omega_{ij}^-,\omega_{kl}^+) = a\delta_{jk}\delta_{il}\tag{4.21}$$

eine bikovariante $\sigma$-Metrik auf dem Paar $(\Gamma_{+,z},\Gamma_{-,z})$ definiert. Dabei haben wir in der Notation von [41, Abschnitt 3] die folgenden Spezialisierungen vorgenommen: $F_1 = D$, $F_2 = D^{-1}$ und $G_1 = G_2 = I$. In [41, Lemma 3.1] wurde die Bikovarianz von $g$ sowie die Nichtausgeartetheit gezeigt. In [41, Proposition 3.3] ist gezeigt worden, dass $g_{12}\sigma_{23}^\pm\sigma_{12}^\pm = g_{23}$, womit die zweite Bedingung an eine $\sigma$-Metrik erfüllt ist. Diese Relation folgt aber auch schon aus der rechten Kovarianz von $g$ analog zum Beweis von Satz 2.13 (iii). Schließlich sind auch die Voraussetzungen von [41, Proposition 3.4] erfüllt, denn aus der Irreduzibilität von $\boldsymbol{u}$ folgt mit dem Schurschen Lemma, dass die Matrizen $\big(f(S(u^i_j))\big)$ und $\big(\overline{f}(u^i_j)\big)$ zueinander proportional sind, siehe auch Bemerkung 2.2. Somit existiert die komplexe Zahl $z$. Man berechnet, dass für die universelle $r$-Form $\boldsymbol{r}_x$ gilt: $f(u^i_j) = x\mathfrak{r}^{-1}D^j_i$. Da $D$ diagonal ist, $F_1 = D$ und $G_1 = G_2 = I$, folgt die Existenz der in [41, Proposition 3.4] genannten Zahl $c$. Somit ist $g$ eine $\sigma$-symmetrische Metrik. Dabei ist

$$g(\omega_0^\tau, \omega_0^{-\tau}) = \mathfrak{s}. \tag{4.22}$$

Wir geben hier noch einen unabhängigen Beweis für die Existenz der $\sigma$-Metrik zwischen $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Hopf-Bimoduln ${}^\vee\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$ kanonisch isomorph sind. Ferner kann die $\sigma$-Metrik $g\colon \Gamma_{+,z} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_{-,z} \to \mathcal{A}$ mit Hilfe der rechten Dualität $g_{\mathrm{R}}$ aus der Identifizierung von $\Gamma_{-,z}$ mit dem rechtsdualen Hopf-Bimodul $\Gamma^\vee_{+,z}$ von $\Gamma_{+,z}$ hergeleitet werden, vgl. Satz 2.14:

$$g(\omega^+_{ij}, \omega^-_{kl}) = g(\omega^+_{ij}, T^{-1}(\omega^\vee_{kl})) := g_{\mathrm{R}}(\omega^+_{ij}, (T^{-1})^{mn}_{kl}\omega^\vee_{mn}) = (T^{-1})^{ji}_{kl},$$

dabei ist $\{\omega^\vee_{kl}\}$ die linksinvariante Dualbasis von $\Gamma^\vee_{+,z}$ mit $g_{\mathrm{R}}(\omega^+_{ij}, \omega^\vee_{mn}) = \delta_{jm}\delta_{in}$ und $T^{mn}_{kl} = (\ell^{-\mathrm{c}} \otimes \ell^+)^{mn}_{xy}\big(S(u^k_x\,(u^{\mathrm{c}})^l_y)\big)$ (nach Schritt (d) des Beweises von Satz 2.14). Dies liefert die erste Formel von (4.21).

Wir zeigen nun die $\sigma$-Symmetrie dieser Metrik auf $(\Gamma, {}^\vee\Gamma)$ mit Hilfe des folgenden Lemmas. Sei zunächst $\Gamma$ ein beliebiger Hopf-Bimodul; wir setzen

$$g{\restriction}{}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma := g_{\mathrm{L}}, \quad g{\restriction}\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma := g_{\mathrm{R}}(\mathrm{id} \otimes T). \tag{4.23}$$

Dann ist $g\sigma = g$ auf $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma$ erfüllt, siehe Satz 2.14. Auf ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ ist diese Bedingung i. a. jedoch nicht erfüllt.

**Lemma 4.12** (i) *Die in* (4.23) *definierte Abbildung $g$ ist genau dann $\sigma$-Metrik des Paares $(\Gamma, {}^\vee\Gamma)$, wenn eine der folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*
(a) $g_{\mathrm{R}}(\mathrm{id} \otimes T) = g_{\mathrm{L}}$, (b) $g_{\mathrm{R}}\sigma = g_{\mathrm{L}}(T^{-1} \otimes \mathrm{id})$, (c) $g_{\mathrm{L}}\sigma^2 = g_{\mathrm{L}}$ *bzw.* (d) $g_{\mathrm{R}} = g_{\mathrm{R}}\sigma^2$.
(ii) *Hinreichend für* (i) *ist, dass $\Gamma$ irreduzibel ist und dass es Elemente $\omega_0 \in \Gamma_{\mathrm{Inv}}$ und $\theta_0 \in {}^\vee\Gamma_{\mathrm{Inv}}$ gibt mit $g_{\mathrm{L}}(\theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0) \neq 0$.*

*Beweis*. (i) Die einzige zu prüfende Eigenschaft an $g$ ist die $\sigma$-Symmetrie auf ${}^\vee\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$. Die Bedingung (a) folgt unmittelbar aus der Definition von $g$. Mit (a) und wegen $g\sigma = g$ auf $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma$ hat man sofort (c), nämlich $g_{\mathrm{L}} = g_{\mathrm{R}}(\mathrm{id} \otimes T)\sigma = g_{\mathrm{L}}\sigma^2$. Ferner ist klar, dass $\sigma(\mathrm{id} \otimes T) = (T \otimes \mathrm{id})\sigma$ in $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} {}^\vee\Gamma$ gilt, denn $\sigma$ und $T$ sind Morphismen von Hopf-Bimoduln und die Identität gilt offenbar für die Modulbasis $\Gamma_{\mathrm{L}} \otimes {}^\vee\Gamma_{\mathrm{R}}$. Hieraus ergibt sich die Äquivalenz mit (b) und (d).
(ii) Wir betrachten die zu ${}^\vee A := g_{\mathrm{L}}\sigma^2$ assoziierte Abbildung $A\colon \Gamma \to \Gamma$, siehe (2.27). Wegen der Irreduzibilität von $\Gamma$ und nach dem Schurschen Lemma folgt $A = c\,\mathrm{id}$ mit einem $c \in \mathbb{C}$, also ${}^\vee A = cg_{\mathrm{L}}$. Wegen der Biinvarianz von $\omega_0$ und $\theta_0$ gilt $\sigma^2(\theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0) = \theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0$. Somit ergibt sich

$$g_{\mathrm{L}}(\theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0) = g_{\mathrm{L}}\sigma^2(\theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0) = cg_{\mathrm{L}}(\theta_0 \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0).$$

Da $g_{\mathrm{L}}(\omega_0 \otimes_{\mathcal{A}} \theta_0) \neq 0$ ist, ergibt sich $c = 1$, und damit $g_{\mathrm{L}}\sigma^2 = g_{\mathrm{L}}$. Die Bedingung (c) aus (i) ist erfüllt. ■

Die Irreduzibilität der Kalküle $\Gamma_{+,z}$ erkennt man wie folgt. Die Bilder von $P_0$ bzw. $I - P_0$ sind die einzigen invarianten Teilräume von $(\Gamma_{+,z})_{\mathrm{L}}$ unter der rechten Kowirkung. Formel (2.46) zeigt jedoch, dass beide Räume nicht unter der rechtsadjungierten Wirkung abgeschlossen sind. Folglich ist $\Gamma_{+,z}$ irreduzibel. Die zweite Bedingung von Lemma 4.12 (ii) ist wegen (4.22) erfüllt.

Wir wollen einige wichtige Eigenschaften des Laplace-Beltrami-Operators herleiten.

**Satz 4.13** *Für $\rho \in \Gamma_\tau^{\wedge k}$ gilt*

$$L_\tau^\pm \rho = (-1)^k\big(-2\mathfrak{s}\rho + \widetilde{g}\big(\sigma^\pm(\omega_0^\tau \otimes_{\mathcal{A}} \rho), \omega_0^{-\tau}\big) + \widetilde{g}\big(\omega_0^{-\tau}, \sigma^\pm(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau)\big)\big). \tag{4.24}$$

*Beweis.* Wir benutzen die Definitionen von $\mathrm{d}_\tau$ und $\partial_\tau^\pm$, die Gleichung $\sigma(\omega_0^{-\tau} \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau) = \omega_0^\tau \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^{-\tau}$ sowie die Gleichungen (4.12) und (4.22) und erhalten die folgenden Gleichungen (dabei verändern wir nur die unterstrichenen Terme von einer Zeile zur nächsten, die anderen Terme bleiben unverändert)

$$\begin{aligned}
L_\tau^\pm \rho &= -\mathrm{d}_\tau\big(\langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm + (-1)^k\langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm\big) + \partial_\tau^\pm\big(\omega_0^\tau \wedge \rho + (-1)^{k-1}\rho \wedge \omega_0^\tau\big)\\
&= -\omega_0^\tau \wedge \langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm + (-1)^{k-1}\langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau + (-1)^{k+1}\big(\omega_0^\tau \wedge \langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm\\
&\quad + (-1)^k\langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau\big) + \langle\omega_0^\tau \wedge \rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm + \underline{(-1)^{k+1}\langle\omega_0^{-\tau}, \omega_0^\tau \wedge \rho\rangle_\pm}\\
&\quad + (-1)^{k-1}(\underline{\langle\rho \wedge \omega_0^\tau, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm} + (-1)^{k+1}\langle\omega_0^{-\tau}, \rho \wedge \omega_0^\tau\rangle_\pm)\\
&= -\omega_0^\tau \wedge \langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm + \underline{(-1)^{k-1}\langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau} + \underline{(-1)^{k+1}\omega_0^\tau \wedge \langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm}\\
&\quad - \langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau + \langle\omega_0^\tau \wedge \rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm + (-1)^{k+1}(\mathfrak{s}\rho \underline{- \omega_0^\tau \wedge \langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm})\\
&\quad + (-1)^{k-1}(\mathfrak{s}\rho \underline{- \langle\rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau}) + \langle\omega_0^{-\tau}, \rho \wedge \omega_0^\tau\rangle_\pm\\
&= 2\mathfrak{s}(-1)^{k+1}\rho - \omega_0^\tau \wedge \langle\rho, \omega^{-\tau}\rangle_\pm - \langle\omega_0^{-\tau}, \rho\rangle_\pm \wedge \omega_0^\tau + \underline{\langle\omega_0^\tau \wedge \rho, \omega_0^{-\tau}\rangle_\pm} +\\
&\quad + \underline{\langle\omega_0^{-\tau}, \rho \wedge \omega_0^\tau\rangle_\pm}\\
&= 2\mathfrak{s}(-1)^{k+1}\rho + (-1)^k\big(\widetilde{g}(\sigma^\pm(\omega_0^\tau \otimes_{\mathcal{A}} \rho), \omega_0^{-\tau}) + \widetilde{g}(\omega_0^{-\tau}, \sigma^\pm(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau))\big).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus (4.20). ■

**Bemerkung 4.3** Der obige Satz ist neu und noch nicht in [41] enthalten. Man erkennt in seinem Beweis, dass die Vorzeichenmodifizierung in der Definition des Laplace-Beltrami-Operators notwendig ist für die Gültigkeit von (4.24). □

### 4.2.1 Dualität von Differential und Kodifferential

Der folgende Satz spielt beim Beweis des Hodgeschen Zerlegungssatzes eine entscheidende Rolle.

**Satz 4.14** *Es sei $\mathcal{A}$ eine kohalbeinfache Hopfalgebra, $(\varGamma_+, \varGamma_-)$ ein Paar von bikovarianten Differentialkalkülen über $\mathcal{A}$ mit der $\sigma$-Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ und $\lambda$, $\mu \in \widehat{\mathcal{A}}$. Für $\nu \in \widehat{\mathcal{A}}$ bezeichne $\nu^{\mathrm{c}} \in \widehat{\mathcal{A}}$ die Äquivalenzklasse der zu $\boldsymbol{u}^\nu$ kontragredienten Kodarstellung $(\boldsymbol{u}^\nu)^{\mathrm{c}}$.*
(i) *Die Abbildung $h\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm\colon \varGamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu) \times \varGamma_{-\tau}^{\wedge k}(\lambda^{\mathrm{c}},\mu^{\mathrm{c}}) \to \mathbb{C}$, $\tau \in \{+,-\}$, $k \geq 0$, ist nicht ausgeartet.*
(ii) *Die Einschränkung $\mathrm{d}_\tau\colon \varGamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu) \to \varGamma_\tau^{\wedge k+1}(\lambda,\mu)$ des Differentials ist die duale Abbildung zur Einschränkung $\partial^\pm_{-\tau}\colon \varGamma_{-\tau}^{\wedge k+1}(\lambda^{\mathrm{c}},\mu^{\mathrm{c}}) \to \varGamma_{-\tau}^{\wedge k}(\lambda^{\mathrm{c}},\mu^{\mathrm{c}})$ des Kodifferentials bezüglich der dualen Paarung $h\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$.*

*Beweis.* (i) Es sei $\varGamma^\wedge := \varGamma_\tau^\wedge$. Wir fixieren $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$ und $k \in \mathbb{N}$ und zeigen zunächst, dass $\sum_{\mu\in\widehat{\mathcal{A}}} \varGamma^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ endlichdimensional ist. Der Raum $\varGamma_{\mathrm{L}}^{\wedge k} \equiv \sum_{\nu\in\widehat{\mathcal{A}}} \varGamma^{\wedge k}(0,\nu)$ ist endlichdimensional, weil $\varGamma_{\mathrm{L}}$ diese Eigenschaft hat. Nun sei $\rho \in \sum_{\mu\in\widehat{\mathcal{A}}} \varGamma^{\wedge k}(\lambda,\mu)$. Wegen $\rho = \rho_{(-2)} \cdot S(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}$ erhalten wir $\rho \in \mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)\varGamma_{\mathrm{L}}^{\wedge k}$. Da $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ endlichdimensional ist, folgt die Behauptung. Analog zeigt man, dass $\dim \sum_{\lambda\in\widehat{\mathcal{A}}} \varGamma^{\wedge k}(\lambda,\mu) < \infty$.
Für $\nu$, $\kappa \in \widehat{\mathcal{A}}$ seien $\{\rho^i_j\}$ und $\{\zeta^m_n\}$ Vektorraumbasen von $\varGamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ bzw. $\varGamma_{-\tau}^{\wedge k}(\nu,\kappa)$. Dann gilt

$$(\mathrm{id}\otimes\varDelta_{\mathrm{R}})\varDelta_{\mathrm{L}}(\rho^i_j) = u^\lambda_{ix} \otimes \rho^x_y \otimes u^\mu_{yj},$$
$$(\mathrm{id}\otimes\varDelta_{\mathrm{R}})\varDelta_{\mathrm{L}}(\zeta^k_l) = u^\nu_{ka} \otimes \zeta^a_b \otimes u^\kappa_{bl}.$$

Wir setzen $h^{ik}_{jl} := h\langle\rho^i_j,\zeta^k_l\rangle_\pm$. Wegen der linken Kovarianz der Kontraktion $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ erhalten wir

$$u^\lambda_{ix}u^\nu_{ky}h\langle\rho^x_j,\zeta^y_l\rangle_\pm = (\mathrm{id}\otimes h)\varDelta\langle\rho^i_j,\zeta^k_l\rangle_\pm = 1\cdot h\langle\rho^i_j,\zeta^k_l\rangle_\pm,$$
$$u^\lambda_{ix}u^\nu_{ky}h^{xy}_{jl} = h^{ik}_{jl}1.$$

Folglich ist $(h^{ik}_{jl})_{i,k} \in \mathrm{Mor}(\mathbf{1},\boldsymbol{u}^\lambda\otimes\boldsymbol{u}^\nu)$ für alle $j,l$. Nach Lemma 3.23 erhalten wir $(h^{ik}_{jl})_{i,k} = 0$, falls $\boldsymbol{u}^\nu \not\cong \boldsymbol{u}^{\lambda^{\mathrm{c}}}$. Unter Verwendung der rechten Kovarianz erhalten wir durch analoge Schlüsse $(h^{ik}_{jl})_{j,l} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^\mu\otimes\boldsymbol{u}^\kappa,\mathbf{1})$ für alle $i,k$ und weiter $(h^{ik}_{jl})_{j,l} = 0$, falls $\boldsymbol{u}^\kappa \not\cong \boldsymbol{u}^{\mu^{\mathrm{c}}}$. Angenommen, $h\langle\rho,\zeta\rangle_\pm = 0$ für ein festes $\rho \in \varGamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ und alle $\zeta \in \varGamma_{-\tau}^{\wedge k}(\lambda^{\mathrm{c}},\mu^{\mathrm{c}})$. Nach den obigen Argumenten ist dann $h\langle\rho,\zeta\rangle_\pm = 0$ für alle $\zeta \in \varGamma_{-\tau}^{\wedge k}(\nu,\kappa)$, $\nu,\kappa \in \widehat{\mathcal{A}}$. Wegen (3.46) folgt $h\langle\rho,\zeta\rangle_\pm = 0$ für alle $\zeta \in \varGamma_{-\tau}^{\wedge k}$. Wegen Satz 4.7 ergibt sich $\rho = 0$. Die Nichtausgeartetheit im zweiten Argument zeigt man analog.
(ii) Es seien $\rho \in \varGamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ und $\zeta \in \varGamma_{-\tau}^{\wedge k+1}(\lambda^{\mathrm{c}},\mu^{\mathrm{c}})$. Wegen (4.11), (4.15), der $\sigma$-Symmetrie von $g$ und wegen $\langle\rho,\zeta\rangle_\pm \in \varGamma_{-\tau}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
h\langle\mathrm{d}\rho,\zeta\rangle_\pm &= h\langle\omega_0^\tau\wedge\rho - (-1)^k\rho\wedge\omega_0^\tau,\zeta\rangle_\pm\\
&= h\langle\omega_0^\tau,\langle\rho,\zeta\rangle_\pm\rangle_\pm + (-1)^{k+1}h\langle\rho,\langle\omega_0^\tau,\zeta\rangle_\pm\rangle_\pm\\
&= h\langle\langle\rho,\zeta\rangle_\pm,\omega_0^\tau\rangle_\pm + (-1)^{k+1}h\langle\rho,\langle\omega_0^\tau,\zeta\rangle_\pm\rangle_\pm\\
&= h\langle\rho,\langle\zeta,\omega_0^\tau\rangle_\pm\rangle_\pm + (-1)^{k+1}h\langle\rho,\langle\omega_0^\tau,\zeta\rangle_\pm\rangle_\pm\\
&= h\langle\rho,\partial^\pm\zeta\rangle_\pm.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis beendet. ■

**Folgerung 4.15** *Für alle $a \in \mathcal{A}$ und $\tau \in \{+,-\}$ gilt*

$$g(\omega^\tau(a),\omega_0^{-\tau}) = g(\omega_0^{-\tau},\omega^\tau(a)) = \mathfrak{s}X_0^\tau(a). \tag{4.25}$$

*Beweis*. Wegen (2.44) haben wir die folgende Peter-Weyl-Zerlegung des Raumes der linksinvarianten Elemente von $\Gamma_\tau$:

$$\Gamma_{\tau,\mathrm{L}} = \Gamma_\tau(\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus \Gamma_\tau(\mathbf{1},\mathbf{ad}),$$

wobei $\mathbf{ad}$ die zu $\mathbf{1}$ in $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}$ komplementäre $(N^2-1)$-dimensionale Kodarstellung bezeichnet. Es seien $\{\omega^\tau_{\mathrm{ad},i}\}$ und $\{X^\tau_{\mathrm{ad},j}\}$ die zu $\{\omega^\tau_0\}$ und $\{X^\tau_0\}$ komplementären Dualbasen von $\Gamma_\tau(\mathbf{1},\mathbf{ad})$ bzw. $\mathfrak{X}^\tau_{\mathrm{ad}}$ (dem entsprechenden $(N^2-1)$-dimensionalen Teilraum von $\mathfrak{X}^\tau$). Dann gilt

$$\omega^\tau(a) = X^\tau_0(a)\omega^\tau_0 + \sum_i X^\tau_{\mathrm{ad},i}(a)\omega^\tau_{\mathrm{ad},i}.$$

Aus dem Beweis von Satz 4.14 (i) folgt, dass die Einschränkung der Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pm$ auf $\Gamma_\tau(\mathbf{1},\mathbf{ad}) \times \Gamma_{-\tau}(\mathbf{1},\mathbf{1})$ verschwindet, da $\mathbf{ad} \not\cong \mathbf{1}$. Insbesondere gilt $g(\omega^\tau_{\mathrm{ad},i},\omega_0^{-\tau}) = 0 = g(\omega_0^{-\tau},\omega^\tau_{\mathrm{ad},i})$ für alle $i$. Zusammen mit der obigen Darstellung für die $\omega$-Abbildung $\omega^\tau$ erhalten wir mit (4.22) die Behauptung. ∎

Im folgenden Satz wird die einfache Gestalt des Laplace-Beltrami-Operators klar. Er lässt sich als Summe der linksregulären und der rechtsregulären Darstellungen der zentralen Elemente $X^\tau_0$ aufschreiben.

**Satz 4.16** *Für $\rho \in \Gamma_\tau^{\wedge k}$ gilt:*

$$\begin{aligned} L^+_\tau\rho &= (-1)^k\mathfrak{s}\big(X^\tau_0 * \rho + \rho * X_0^{-\tau}\big) \\ &= (-1)^k\mathfrak{s}\big(\rho_{(0)}X^\tau_0(\rho_{(1)}) + X_0^{-\tau}(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}\big), \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} L^-_\tau\rho &= (-1)^k\mathfrak{s}\big(X_0^{-\tau} * \rho + \rho * X^\tau_0\big) \\ &= (-1)^k\mathfrak{s}\big(\rho_{(0)}X_0^{-\tau}(\rho_{(1)}) + X^\tau_0(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}\big). \end{aligned} \tag{4.27}$$

*Insbesondere gilt $L^+_\tau a = L^-_\tau a = \mathfrak{s}X_0 * a = \mathfrak{s}a * X_0$ für $a \in \mathcal{A}$.*

*Beweis*. Wir beweisen (4.26). Es sei $\rho = \sum_i \rho_i a_i$ mit $\rho_i \in (\Gamma_\tau^{\wedge k})_{\mathrm{L}}$ und $a_i \in \mathcal{A}$. Wegen (2.23), $\beta a = a_{(1)}(\beta \triangleleft a_{(2)})$, und da $g$ und $\sigma$ Modulabbildungen sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\sigma(\omega^\tau_0 \otimes_{\mathcal{A}} \rho_i a_i),\omega_0^{-\tau}) &= \widetilde{g}(\sigma(\omega^\tau_0 \otimes_{\mathcal{A}} \rho_i)a_i,\omega_0^{-\tau}) \\ &= \widetilde{g}(\rho_{i(0)} \otimes_{\mathcal{A}} (\omega^\tau_0 \triangleleft \rho_{i(1)})a_i,\omega_0^{-\tau}) \\ &= \widetilde{g}(\rho_{i(0)}a_{i(1)} \otimes_{\mathcal{A}} (\omega^\tau_0 \triangleleft (\rho_{i(1)}a_{i(2)})),\omega_0^{-\tau}) \\ &= \rho_{i(0)}a_{i(1)}g\big(\omega^\tau(\rho_{i(1)}a_{i(2)}) + \varepsilon(\rho_{i(1)}a_{i(2)})\omega^\tau_0,\omega_0^{-\tau}\big) \\ &= \rho_{i(0)}a_{i(1)}\mathfrak{s}X^\tau_0(\rho_{i(1)}a_{i(2)}) + \rho_i a_i g(\omega^\tau_0,\omega_0^{-\tau}) \\ &= \mathfrak{s}(\rho_{(0)}X^\tau_0(\rho_{(1)}) + \rho). \end{aligned}$$

In der vierten Gleichung benutzten wir (2.31), in der fünften (4.25) und in der letzten Gleichung (4.22). Nun sei $\rho = \sum_i a_i\rho_i$ mit $\rho_i \in (\Gamma_\tau^{\wedge k})_{\mathrm{L}}$ und $a_i \in \mathcal{A}$. Wegen (4.25) und (4.22) haben wir

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\omega_0^{-\tau}, \sigma(a_i\rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau)) &= \widetilde{g}(\omega_0^{-\tau}a_i, \sigma(\rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau))\\ &= \widetilde{g}(a_{i(1)}\omega_0^{-\tau} \triangleleft a_{i(2)}, \omega_0^\tau \otimes_{\mathcal{A}} \rho_i)\\ &= a_{i(1)}g\big(\omega^{-\tau}(a_{i(2)}) + \varepsilon(a_{i(2)})\omega_0^{-\tau}, \omega_0^\tau\big)\rho_i\\ &= \mathfrak{s}\big(a_{i(1)}X_0^{-\tau}(a_{i(2)})\rho_i + a_i\rho_i\big)\\ &= \mathfrak{s}(X_0^{-\tau}(\rho_{(-1)})\rho_{(0)} + \rho).\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung benutzten wir die Zentralität von $X_0^\tau$ und Lemma 3.22. Setzt man die beiden Teile in (4.24) ein, so erhält man (4.26).
Wir zeigen nun (4.27). Analog zu den obigen Herleitungen für $L_\tau^+$ zeigt man, dass die Gleichung $\widetilde{g}(\sigma^-(\omega_0^\tau \otimes_{\mathcal{A}} \rho), \omega_0^{-\tau}) = \mathfrak{s}\big(\rho + X_0(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}\big)$ gilt. Etwas anders funktioniert der zweite Teil. Es sei $\rho = \sum_i a_i\rho_i$ mit $\rho_i \in (\Gamma_\tau^{\wedge k})_{\mathrm{L}}$ und $a_i \in \mathcal{A}$. Benutzt man (2.23), so erhält man

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\omega_0^{-\tau}, &\sigma^-(a_i\rho_i \otimes_{\mathcal{A}} \omega_0^\tau)) = \widetilde{g}(\omega_0^{-\tau}a_i, (\omega_0^\tau \triangleleft S^{-1}\rho_{i(1)}) \otimes_{\mathcal{A}} \rho_{i(0)})\\ &= g\big(\omega_0^{-\tau}a_iS(S^{-1}(\rho_{i(2)})), \omega_0^\tau S^{-1}(\rho_{i(1)})\big)\rho_{i(0)}\\ &= g\big(a_{i(1)}\rho_{i(2)}\omega_0^{-\tau} \triangleleft (a_{i(2)}\rho_{i(3)}), \omega_0^\tau\big)S^{-1}(\rho_{i(1)})\rho_{i(0)}\\ &= \mathfrak{s}a_{i(1)}\rho_{i(2)}\big(\varepsilon(a_{i(2)}\rho_{i(3)}) + X_0^{-\tau}(a_{i(2)}\rho_{i(3)})\big)S^{-1}(\rho_{i(1)})\rho_{i(0)}\\ &= \mathfrak{s}(\rho + a_{i(1)}\rho_{i(0)}X_0^{-\tau}(a_{i(2)}\rho_{i(1)}))\\ &= \mathfrak{s}(\rho + \rho_{(0)}X_0^{-\tau}(\rho_{(1)})).\end{aligned}$$

Dies liefert (4.27). Da $X_0^\tau$ zentral ist, folgt $L_\tau^+ a = L_\tau^- a = \mathfrak{s}X_0 * a = \mathfrak{s}a * X_0$ aus (4.26) und (4.27). ∎

Wegen der Zentralität von $X_0^\tau$ und Lemma 3.22 (ii) existieren für alle $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$ komplexe Zahlen $E_\lambda^\tau$, so dass $X_0^\tau *$ als skalares Vielfaches der Identität auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ wirkt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}X_0^\tau * h^\lambda * a &= E_\lambda^\tau h^\lambda * a,\\ \mathfrak{s}X_0^\tau(h^\lambda * a) &= E_\lambda^\tau h^\lambda(a)\end{aligned} \tag{4.28}$$

für $a \in \mathcal{A}$. Ein wichtiger Schritt zur Bestimmung der de-Rham-Kohomologie ist die Tatsache, dass sich der Laplace-Beltrami-Operator auf $\Gamma^\wedge$ diagonalisieren lässt und seine Eigenwerte berechenbar sind.

**Satz 4.17** *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(G_q)$ die Koordinatenhopfalgebra der Quantengruppe $G_q$, $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ mit $\tau \in \{+,-\}$ und $\Gamma$-zulässigem Parameter $z$. Für $\lambda$, $\mu \in \widehat{\mathcal{A}}$ definieren wir die Abbildung $h^{\lambda\mu}\colon \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge(\lambda,\mu)$ durch $h^{\lambda\mu}(\rho) = h^\lambda(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}h^\mu(\rho_{(1)})$. Dann gilt für $\rho \in \Gamma^\wedge$ und $\rho^{\lambda\mu} = h^{\lambda\mu}(\rho)$*

$$\rho = \sum_{\lambda,\mu\in\widehat{\mathcal{A}}} \rho^{\lambda\mu}, \quad \Gamma^\wedge = \bigoplus_{k\geq 0}\bigoplus_{\lambda,\mu\in\widehat{\mathcal{A}}} \Gamma^{\wedge k}(\lambda,\mu), \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}L_\tau^+\rho^{\lambda\mu} &= (-1)^k(E_\lambda^{-\tau} + E_\mu^\tau)\rho^{\lambda\mu},\\ L_\tau^-\rho^{\lambda\mu} &= (-1)^k(E_\lambda^\tau + E_\mu^{-\tau})\rho^{\lambda\mu}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

*Wir bezeichnen den auftretenden Eigenwert mit $E_{\lambda\mu} := E_\lambda^- + E_\mu^+$.*

*Beweis.* (a) Man zeigt ohne Probleme, dass tatsächlich $\rho^{\lambda\mu} \in \Gamma^\wedge(\lambda,\mu)$. Wegen $\sum_\lambda h^\lambda = \varepsilon$ und $\rho = \varepsilon(\rho_{(-1)})\rho_{(0)}\varepsilon(\rho_{(1)})$ folgt der erste Teil von (4.29). Zum zweiten Teil: Der erste Summand der Summe ist direkt wegen der Graduierung. Die Direktheit der zweiten Summe folgt aus der Tatsache, dass die Matrixelemente inäquivalenter irreduzibler Kodarstellungen linear unabhängig sind, siehe Definition 3.6 (ii).
(b) Wegen $\Delta_{\mathrm{R}}(\rho^{\lambda\mu}) = h^\lambda(\rho_{(-1)})\rho_{(0)} \otimes h^\mu * \rho_{(1)}$ und $\Delta_{\mathrm{L}}(\rho^{\lambda\mu}) = \rho_{(-1)} * h^\lambda \otimes \rho_{(0)} h^\mu(\rho_{(1)})$ erhalten wir aus (4.26) und (4.28) die Gleichungen

$$\begin{aligned} L^+_\tau \rho^{\lambda\mu} &= (-1)^k \mathfrak{s}\big(h^\lambda(\rho_{(-1)})\rho_{(0)} X^\tau_0(h^\mu * \rho_{(1)}) + X_0^{-\tau}(h^\lambda * \rho_{(-1)})\rho_{(0)} h^\mu(\rho_{(1)})\big) \\ &= (-1)^k (E^\tau_\mu + E^{-\tau}_\lambda)\rho^{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Gleichung von (4.30) verläuft ähnlich. ∎

## 4.3 De-Rham-Kohomologie und Hodge-Zerlegung

### 4.3.1 Resultate

Wir setzen

$$\begin{aligned} P_+ &= \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}, \\ P_{++} &= \{\lambda \in P_+ \mid \lambda_N \geq 0\}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ parametrisiert $P_+$ genau die irreduziblen Kodarstellungen von $\mathcal{A}$, siehe etwa [62, Theorem 11.51], wobei $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, -1)$ und $(1, 1, \ldots, 1)$ den Kodarstellungen $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}$ bzw. der Determinante $\mathcal{D}$ entsprechen. Wir benötigen, da die $\lambda_i$ nicht mehr als nichtnegativ vorausgesetzt werden können, eine Erweiterung der in [67, Chapter 1] für Partitionen eingeführten Begriffe auf Elemente $\lambda \in P_+$, Young-Diagramme mit „negativen“ Spalten: Für $\lambda \in P_+$ definieren wir $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$. Für $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $j \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $(i, j) \in \lambda$, falls $1 \leq j \leq \lambda_i$ oder $\lambda_i < j \leq 0$. In dieser Situation definieren wir für Kästchen $x := (i, j) \in \lambda$ die Abbildung sgn wie folgt. Es seien $\operatorname{sgn}(x) := 1$, falls $j \geq 1$ und $\operatorname{sgn}(x) := -1$ sonst. Der *Inhalt* von $x \in \lambda$ sei dann $c(x) := j - i$ und der *Inhalt* von $\lambda$ sei $c(\lambda) := \sum_{x\in\lambda} \operatorname{sgn}(x)\, c(x)$. Insbesondere gilt $\sum_{x\in\lambda} \operatorname{sgn}(x) = |\lambda|$.
Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ sagen wir, dass der Kalkülparameter $z$ *regulär* ist, falls für alle $\lambda$, $\mu \in P_+$ die Zahl

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} = (z^{-|\mu|} - 2 + z^{|\lambda|})[\![N]\!]_q + (q - q^{-1}) \times \\ \times \left( z^{-|\mu|} \sum_{x\in\mu} \operatorname{sgn}(x) q^{N+2c(x)} - z^{|\lambda|} \sum_{x\in\lambda} \operatorname{sgn}(x) q^{-N-2c(x)} \right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

von Null verschieden ist, bis auf $\lambda = \mu = (0)$. In der Tat kann man für einige wichtige Fälle, wie $z = 1$ und $z^N = q^2$ Aussagen zur Regularität von $z$ treffen. Wir werden unten sehen, dass die Zahlen $F_{\lambda\mu}$ gerade die Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators auf den Formen vom Typ $(\lambda, \mu)$ sind.

Es sei $\Lambda^\wedge = \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k$ eine Differentialalgebra. Wie üblich bezeichne

$$H_{\mathrm{de\,R}}(\Lambda^\wedge) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Lambda^\wedge) \quad \text{mit} \quad H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Lambda^\wedge) = \ker \mathrm{d}_k / \operatorname{im} \mathrm{d}_{k-1}, \tag{4.33}$$

die de-Rham-Kohomologie von $\Lambda^\wedge$. Wegen der Leibnizregel ist $\ker \mathrm{d} = \bigoplus_{k\geq 0} \ker \mathrm{d}_k$ eine Unteralgebra von $\Lambda^\wedge$ und $\operatorname{im} \mathrm{d} = \bigoplus_{k\geq 0} \operatorname{im} \mathrm{d}_k$ ein Ideal von $\ker \mathrm{d}$. Folglich ist $H_{\mathrm{de\,R}}(\Lambda^\wedge)$ eine Algebra. Da das Differential $\mathrm{d}$ bikovariant ist, sind die Algebren $\Gamma^\wedge_{\mathrm{L}}$, $\Gamma^\wedge_{\mathrm{R}}$ und $\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}$ sowie die Vektorräume $\Gamma^\wedge(\mathbf{1}, \mathfrak{D})$ und $\Gamma^\wedge(\mathfrak{D}, \mathbf{1})$ jeweils $\mathbb{Z}$-graduierte Differentialkomplexe.

**Theorem 4.18** *Die komplexe Zahl $q$ sei transzendent.*
(a) *Es sei $G_q$ eine der Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$, $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{SO}_q(N)$ bzw. $\mathrm{Sp}_q(N)$ und $\mathcal{A} = \mathcal{O}(G_q)$ ihre Koordinatenhopfalgebra. Ferner sei $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ mit $\Gamma$-zulässigem Parameter $z$. Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ setzen wir zusätzlich voraus, dass $z$ regulär ist. Wir betrachten Woronowicz' äußere Algebra $\Gamma^\wedge = {}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$. Dann sind die natürlichen Einbettungen der links-, rechts- bzw. biinvarianten Formenräume in $\Gamma^\wedge$ Quasiisomorphismen, das heißt*

$$H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{L}}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{R}}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}).$$

(b) *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{O}_q(2n+1))$ und $\Gamma$ wie oben. Im Fall $\mathrm{GL}_q(N)$ gelte $z^N q^{-2} = \zeta$, wobei $\zeta$ eine primitive $m$-te Einheitswurzel sei, $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren Isomorphismen*

$$\begin{aligned}
&H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \cong \mathbb{C}[\mathcal{D}^m, \mathcal{D}^{-m}] \otimes H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) && \textit{für} \quad \mathrm{GL}_q(N),\\
&H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus \mathcal{D} H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) && \textit{für} \quad \mathrm{O}_q(2n+1), \qquad \Gamma = \Gamma_{\tau,1},\\
&H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus H_{\mathrm{de\,R}}(\mathcal{D}\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) && \textit{für} \quad \mathrm{O}_q(2n+1).
\end{aligned}$$

*In allen Fällen gilt*

$$H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{L}}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{R}}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}).$$

(c) *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{O}_q(2n))$ und $\Gamma$ wie in* (a). *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) &\cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus \mathcal{D} H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge(\mathbf{1}, \mathfrak{D})) \oplus H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge(\mathfrak{D}, \mathbf{1})),\\
H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{L}}) &\cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge(\mathbf{1}, \mathfrak{D})),\\
H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{R}}) &\cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \oplus H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge(\mathfrak{D}, \mathbf{1})).
\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.4** Für die Quantengruppe $\mathrm{GL}_q(N)$ ist der Parameterwert $z = 1$ von besonderem Interesse, da nur in diesem Fall die Vertauschungsrelationen zwischen den Differentialen $\mathrm{d}u^i_j$ und den Matrixelementen $u^m_n$ linear sind, d. h.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \hat{R}^\tau \boldsymbol{u}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}_2 \hat{R}^\tau.$$

Diese Kalküle wurden in den Arbeiten [100], [71] und [102] ausführlich untersucht. Im Beweis von Lemma 4.23 werden wir zeigen, dass $z = 1$ regulär ist. □

**Theorem 4.19** *Es sei $q$ transzendent. $G_q$ sei eine der Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ bzw. $\mathrm{SL}_q(N)$ und $\mathcal{A} = \mathcal{O}(G_q)$ ihre Koordinatenhopfalgebra. Es sei $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ mit $\Gamma$-zulässigem Parameter $z$ ein $N^2$-dimensionaler bikovarianter DKEO über $\mathcal{A}$. Es sei $\Gamma^\wedge = {}_{\mathrm{W}}\Gamma^\wedge$ Woronowicz' äußere Algebra. Im Falle $\mathrm{GL}_q(N)$ setzen wir zusätzlich voraus, dass $z$ regulär ist. Dann gilt die folgende Hodge-Zerlegung für $\Gamma^{\wedge k}$ und $k \in \mathbb{N}_0$:*

$$\begin{aligned} \Gamma^{\wedge k} &\cong \mathrm{d}\,\Gamma^{\wedge k-1} \oplus \partial^+\,\Gamma^{\wedge k+1} \oplus H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge), \\ \Gamma^{\wedge k} &\cong \mathrm{d}\,\Gamma^{\wedge k-1} \oplus \partial^-\,\Gamma^{\wedge k+1} \oplus H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge). \end{aligned} \tag{4.34}$$

*Außerdem ist der Kohomologiering von $\Gamma^\wedge$ isomorph zur Algebra der biinvarianten Formen und zum Vektorraum der harmonischen Formen:*

$$H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \cong H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \cong \Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}} \cong H^+(\Gamma^{\wedge k}) \cong H^-(\Gamma^{\wedge k}). \tag{4.35}$$

**Bemerkung 4.5** (i) Verbindet man das Resultat aus Theorem 3.12 (i) mit der obigen Kohomologieaussage, so hat man $\dim H^{N^2}_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) = \dim \Gamma^{\wedge N^2}_{\mathrm{Inv}} = 1$. Das heißt, es gibt auf $\mathcal{A}$ ein lineares Funktional $f$, welches die folgenden Eigenschaften besitzt: Für alle $a \in \mathcal{A}$ gibt es ein $\rho \in \Gamma^{\wedge(N^2-1)}$ mit

$$a\nu = \mathrm{d}\rho + f(a)\nu,$$

wobei $\nu \in \Gamma^{\wedge N^2}_{\mathrm{Inv}}$ die, bis auf skalare Vielfache, eindeutig bestimmte Form vom Grad $N^2$ ist (Volumenform). Da $\mathrm{d}$ bikovariant ist, findet man leicht, dass $a_{(1)}f(a_{(2)}) = f(a_{(1)})a_{(2)} = f(a)1$ und $f(1) = 1$. Somit ist $f$ das Haarfunktional $h$ von $\mathcal{A}$.
(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra zu den Serien B, C oder D, dann ist eine biinvariante Form i. a. nicht geschlossen. Es gibt jedoch eine abgeschwächte Form des Hodgeschen Zerlegungssatzes (4.34). Dazu sei $\Lambda^k := L^+(\Gamma^{\wedge k}) = L^-(\Gamma^{\wedge k})$. Man kann zeigen, dass gilt

$$\mathrm{d}\,\Lambda^{k-1} \oplus \partial^+\,\Lambda^{k+1} \cong \Lambda^k \cong \mathrm{d}\,\Lambda^{k-1} \oplus \partial^-\,\Lambda^{k+1}. \tag{4.36}$$

Mit Hilfe des Computeralgebra-Programms FELIX [5] konnten die ersten Glieder der Poincaré-Reihen von $\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}$ und $H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}})$ bestimmt werden: $P(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}, t) = 1 + t + 5t^3 + 15t^4 + \cdots$ und $P(H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}), t) = 1 + t + 2t^3 + 2t^4 + \cdots$. □

### 4.3.2 Die Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators

Für den Rest dieses Abschnitts bezeichne $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra einer der Quantengruppen $G_q$ wie im Theorem 4.18. Wie schon im Abschnitt 3.3 eingeführt, bezeichnet $\lambda'_i$ für eine Partition $\lambda \in P_{++}$ die Länge der $i$-ten Spalte des Young-Diagramms $\lambda$. Wir definieren die Mengen $P(\mathcal{A})$ für die einzelnen Quantengruppen als

$$\begin{array}{ll} P_+ & \text{für } \mathrm{GL}_q(N), \\ P^0_{++} := \{\lambda \in P_{++} \mid \lambda_N = 0\} & \text{für } \mathrm{SL}_q(N), \\ \{\lambda \in P_{++} \mid \lambda'_1 + \lambda'_2 \le N\} & \text{für } \mathrm{O}_q(N), \\ \{\lambda \in P_{++} \mid \lambda'_1 \le n\} & \text{für } \mathrm{Sp}_q(2n), \\ \{\lambda \in P_{++} \mid \lambda'_1 \le \frac{N}{2}\} & \text{für } \mathrm{SO}_q(N). \end{array}$$

Die Mengen $P_+$ und $P_{++}$ sind bereits in (4.31) definiert worden. Nach [62, Theorem 11.22] entsprechen die irreduziblen Kodarstellungen $\boldsymbol{v}$ von $\mathcal{A}$ eineindeutig den Elementen von $P(\mathcal{A})$. Wir identifizieren im folgenden stets $\widehat{\mathcal{A}}$ und $P(\mathcal{A})$.

Wir setzen für alle vier Serien

$$W^\tau_{m+1} = \hat{R}^\tau_m \hat{R}^\tau_{m-1} \cdots \hat{R}^\tau_2 \hat{R}^\tau_1 \hat{R}^\tau_1 \hat{R}^\tau_2 \cdots \hat{R}^\tau_{m-1} \hat{R}^\tau_m. \tag{4.37}$$

Es bezeichne $\mathrm{tr}^2_q$ die $q$-Spurbildung an der letzten Komponente, d. h., für $T \in \mathrm{End}(V^{\otimes m+1})$ ist

$$(\mathrm{tr}^2_q\, T)^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_m} = T^{i_1\cdots i_m\, i}_{j_1\cdots j_m\, j} (D^{-1})^j_i. \tag{4.38}$$

**Lemma 4.20** *Es sei $\mathcal{A}$ die Koordinatenhopfalgebra zu einer der Quantengruppen $G_q$, $m \in \mathbb{N}$ und $\vec{\imath} = (i_1, \ldots, i_m)$, $\vec{\jmath} = (j_1, \ldots, j_m)$ Multiindizes über $\{1, \ldots, N\}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{s} X^\tau_0 (u^{i_1}_{j_1} \cdots u^{i_m}_{j_m}) = z^{-\tau m}\, (\mathrm{tr}^2_q\; W^\tau_{m+1})^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} - \mathfrak{s}\, \delta^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}}.$$

*Die Matrix $(\mathrm{tr}^2_q\; W^\tau_{m+1})^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}}$ ist zentral in $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$.*

*Beweis*. Wir zeigen zunächst die letztgenannte Eigenschaft. Da $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$ von den Matrizen $\hat{R}_{i,i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$ als Algebra erzeugt wird, reicht es zu zeigen, dass $X^\tau_0(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$ mit allen $\hat{R}_{i,i+1}$ vertauscht. Dies ist aber klar wegen der definierenden Relationen $\hat{R}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\hat{R}$. Wegen (4.37) und (4.38) ist klar, dass $\mathrm{tr}^2_q\; W^\tau_{m+1} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$.

Wir führen den Beweis der obigen Gleichung nur für $\tau = +$. Der Beweis verläuft für $\tau = -$ analog. Wir benutzen die Schreibweise $u^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} := u^{i_1}_{j_1} \cdots u^{i_m}_{j_m}$. Mit vollständiger Induktion über $m$ beweist man leicht, dass

$$\omega^+_{ij} \triangleleft u^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} = z^{-m} (\hat{R}_m \cdots \hat{R}_1)^{\vec{\imath}\, x}_{i\, \vec{z}}\, (\hat{R}_1 \cdots \hat{R}_m)^{j\, \vec{z}}_{\vec{\jmath}\, y}\, \omega^+_{xy}.$$

Für $m = 1$ ist dies genau die Formel (2.46). Somit gilt wegen $\omega^+_0 = \sum_i \omega^+_{ii}$

$$\omega^+_0 \triangleleft u^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} = z^{-m} (W^+_{m+1})^{\vec{\imath}x}_{\vec{\jmath}y}\, \omega^+_{xy}.$$

Wegen $\omega^+(a) = X^+_{ij}(a)\, \omega^+_{ij}$, (2.31) und (2.47) gilt:

$$X^+_{ij}(u^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}}) = z^{-m} (W^+_{m+1})^{\vec{\imath}i}_{\vec{\jmath}j} - \delta^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} \delta^i_j \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} X^+_0(u^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}}) = z^{-m}\, (\mathrm{tr}^2_q\; W^+_{m+1})^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} - \delta^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}} \mathfrak{s}.$$

■

Aus der unten stehenden graphischen Darstellung der Elemente $\mathrm{tr}^2_q\, W^\tau_m$ ist deren Zentralität unmittelbar ablesbar, da sich jeder Morphismus $X \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m-1})$, der oben, d. h. von links, heranmultipliziert wird, vollständig nach unten hindurchschieben lässt.

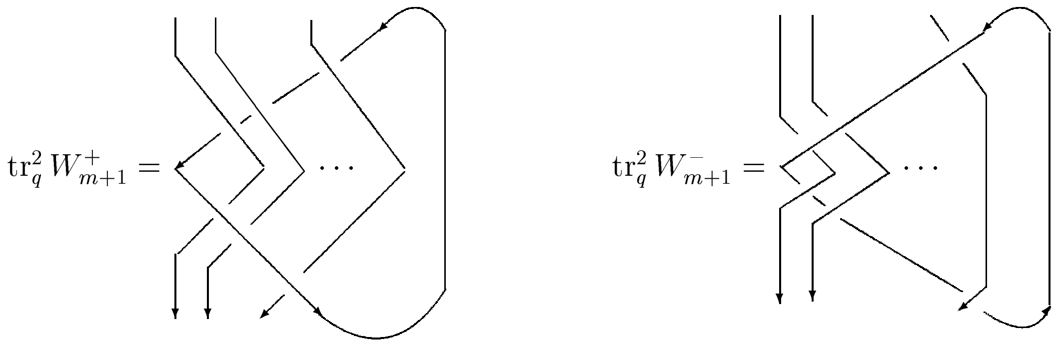


Abbildung 4.1: Die Elemente $\operatorname{tr}_q^2 W_{m+1}^{\tau}$.

Unser Ziel ist es, die Zerlegung der zentralen Elemente $\operatorname{tr}_q^2 W_{m+1}^{\tau} \in \operatorname{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$ als Linearkombination der minimalen zentralen Idempotente $Z_\lambda = \varrho(z_\lambda)$, $\lambda \vdash m$ aufzuschreiben. Im orthogonalen und symplektischen Fall treten zwar noch zentrale Anteile mit $\lambda \vdash (m-2f)$, $m = 0, \dots, [m/2]$ auf, die jedoch nicht berücksichtigt werden müssen, da man o. B. d. A. für die irreduzible Kodarstellung $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ die Unterkodarstellung von $\boldsymbol{u}^{\otimes m}$ mit $\lambda \vdash m$ wählen kann (kleinste Wahl von $m$). Im orthogonalen und symplektischen Fall interessieren wir uns also auch nur für die zentralen Projektoren $z_\lambda$ mit $\lambda \vdash m$.

Für $\tau \in \{+,-\}$ und die A-Serie definieren wir die folgenden rationalen Funktionen, die vom Kalkülparameter $z$ und einem variablen Deformationsparameter $t$ abhängen, der bei Spezialisierung gleich $q$ gesetzt wird. Für $\lambda \in P_+$ setzen wir:

$$\begin{aligned} e_\lambda^\tau(t,z) &:= z^{-\tau|\lambda|}\left([\![N]\!]_t + \tau(t-t^{-1})\sum_{x\in\lambda}\operatorname{sgn}(x)t^{\tau(N+2c(x))}\right) - [\![N]\!]_t, \\ e_{\lambda\mu}(t,z) &:= e_\lambda^-(t,z) + e_\mu^+(t,z). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Für die B-, C- und D-Serien setzen wir weiter, man beachte $z^2 = 1$,

$$e_\lambda(t) := \epsilon z^{|\lambda|}(t-t^{-1})^2 \sum_{x\in\lambda}[\![N-\epsilon+2c(x)]\!]_t.$$

Wegen der Isomorphie der Kalküle $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$ gilt $E_\lambda^+ = E_\lambda^- =: E_\lambda$.

**Lemma 4.21** (i) *Es sei $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ oder $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$ und $z$ sei ein $\Gamma$-zulässiger Parameter. Ferner sei $\lambda \in P_{++}$. Dann gilt für den Eigenwert $E_\lambda^\tau$ von $X_0^\tau$ auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$*

$$E_\lambda^\tau = e_\lambda^\tau(q,z).$$

(ii) *Es seien $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$, $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(N))$ bzw. $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ und $z$ ein $\Gamma$-zulässiger Parameter. Ferner sei $\lambda \in P(\mathcal{A})$. Dann gilt für den Eigenwert $E_\lambda$ von $X_0$ auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$*

$$E_\lambda = e_\lambda(q).$$

Bevor wir den Beweis des obigen Lemmas antreten können, müssen wir eine neue Theorie bereitstellen.

### 4.3.3 Pfadalgebren

In diesem Abschnitt geben wir einen kleinen Einblick in die von Leduc und Ram in [64] entwickelte Theorie der Pfadalgebren (engl. path algebras). Sie ermöglicht eine geschlossene Entwicklung der Darstellungstheorien verschiedener verwandter Algebren wie etwa der Iwahori-Hecke-Algebra, Birman-Wenzl-Murakami-Algebra oder Temperley-Lieb-Algebra. Unser Ziel ist die Herleitung der Formeln (4.44) und (4.47).

*Bratteli-Diagramme, Pfade und Tableaus.* Ein *Bratteli-Diagramm* ist ein Graph, dessen Ecken aus einer Familie von Mengen $\hat{A}_m$, $m \geq 0$ stammen, und dessen Kanten Ecken aus $\hat{A}_m$ mit Ecken aus $\hat{A}_{m+1}$ verbinden. Wir setzen voraus, dass $\hat{A}_0$ nur aus einer einzigen Ecke $\varnothing$ besteht. Zwei Ecken sind durch höchstens eine Kante miteinander verbunden. Die Ecken heißen in unserem Fall auch *Formen* (engl. shape). Die Menge $\hat{A}_m$ ist die Menge der Formen vom *Niveau* $m$. Ist $\lambda \in \hat{A}_m$ mit einer Form $\mu \in \hat{A}_{m+1}$ verbunden, dann schreiben wir $\lambda \leq \mu$.

Es seien $A$ ein Bratteli-Diagramm, $\lambda \in \hat{A}_m$ und $\mu \in \hat{A}_n$ mit $m < n$. Ein *Pfad* $P$ von $\lambda$ nach $\mu$ ist eine Folge von Formen $\lambda^{(i)}$, $m \leq i \leq n$

$$P = (\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}, \ldots, \lambda^{(n)}),$$

wobei $\lambda = \lambda^{(m)} \leq \lambda^{(m+1)} \leq \cdots \leq \lambda^{(n)} = \mu$ und $\lambda^{(i)} \in \hat{A}_i$. Ein *Tableau* $T$ der Form $\lambda$ ist ein Pfad von $\varnothing$ nach $\lambda$, $T = (\varnothing, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda)$. Wir schreiben $\mathrm{shp}(T) = \lambda$, falls $T$ ein Tableau der Form $\lambda$ ist; $m$ ist die *Länge* von $T$, falls $\mathrm{shp}(T) \in \hat{A}_m$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein

- $\mathcal{T}^\lambda$ ist die Menge der Tableaus der Form $\lambda$,
- $\mathcal{T}^m$ ist die Menge der Tableaus der Länge $m$,
- $\mathcal{T}^m_\lambda$ ist die Menge der Pfade von $\lambda$ zu einer beliebigen Form der Länge $m$.
- $\Omega^\lambda$ ist die Menge der Paare $(S,T)$ von Pfaden $S,T \in \mathcal{T}^\lambda$,
- $\Omega^m$ ist die Menge der Paare $(S,T)$ von Pfaden $S,T \in \mathcal{T}^m$ mit $\mathrm{shp}(S) = \mathrm{shp}(T)$.

*Pfadalgebren.* Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir eine $\mathbb{C}$-Algebra $A_m$ mit der Basis $\{E_{ST} \mid (S,T) \in \Omega^m\}$ und der Multiplikation

$$E_{ST} E_{PQ} = \delta_{TP} E_{SQ}.$$

Man beachte, dass $A_0 \cong \mathbb{C}$. Jedes $a \in A_m$ kann in der Form

$$a = \sum_{(S,T)\in\Omega^m} a_{ST} E_{ST}$$

mit gewissen Konstanten $a_{ST} \in \mathbb{C}$ geschrieben werden. Auf diese Weise können wir jedes $a \in A_m$ als die gewichtete Summe von Pfadpaaren auffassen. Jede Algebra $A_m$ ist isomorph zur direkten Summe von Matrixalgebren. Wir nennen die Familie der $A_m$ auch einen *Turm von Pfadalgebren zum Bratteli-Diagramm* $A$. Es gilt

$$A_m = \bigoplus_{\lambda \in \hat{A}_m} \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda},$$

wobei $d_\lambda = \mathrm{Card}(\mathcal{T}^\lambda)$. Somit sind also die irreduziblen Darstellungen von $A_m$ durch die Menge der Formen $\hat{A}_m$ parametrisiert. Außerdem ist die Dimension der durch $\lambda$ parametrisierten irreduziblen Darstellung gleich der Menge der Pfade von $\varnothing$ nach $\lambda$. Die Menge der Tableaus $\mathcal{T}^\lambda$ bildet also eine natürliche Basis des zu $\lambda$ gehörigen irreduziblen $A_m$-Moduls.

*Die Einbettung $A_m \subseteq A_n$, $m \leq n$.* Es seien $T = (\lambda, \ldots, \mu)$ ein Pfad von $\lambda$ nach $\mu$ und $S = (\mu, \ldots, \nu)$ ein Pfad von $\mu$ nach $\nu$. Wir definieren den Pfad

$$T * S = (\lambda, \ldots, \mu, \ldots, \nu)$$

als Verkettung der beiden Pfade $T$ und $S$. Dabei tritt $\mu$ in $T * S$ nur einmal auf. Nun sei $0 \leq m < n$. Wir definieren die Einbettung $A_m \subseteq A_n$ wie folgt: Für jedes Paar $(P, Q) \in \Omega^m$ fassen wir $E_{PQ}$ als ein Element von $A_n$ auf vermöge

$$E_{PQ} = \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda^n} E_{P*T,\,Q*T}, \quad \text{mit} \quad \lambda = \mathrm{shp}(P) = \mathrm{shp}(Q). \tag{4.40}$$

*Die Zentralisatoralgebren* $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes k})$. Wir betrachten das Bratteli-Diagramm $Y$ aus Abbildung 4.2.

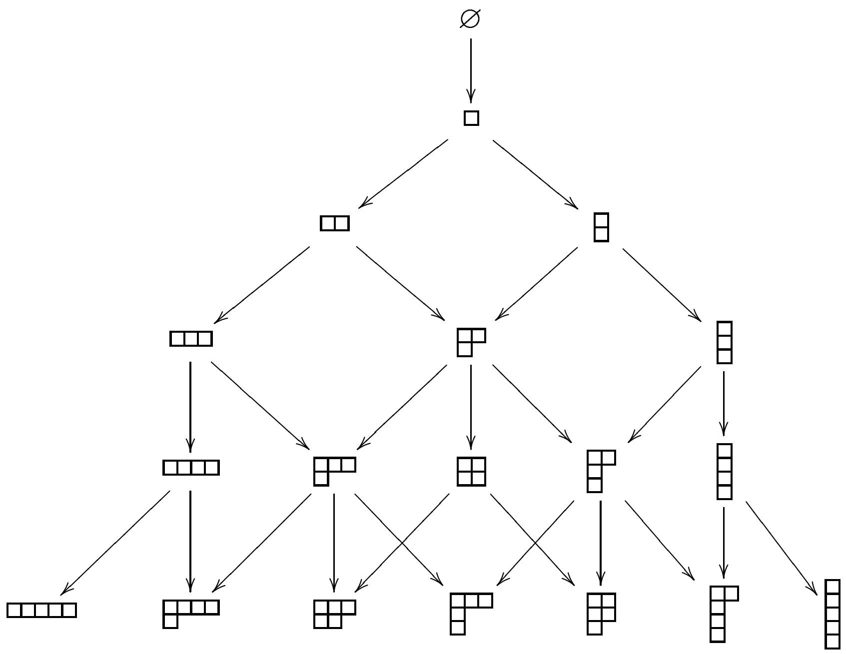



Abbildung 4.2: Das Young-Gitter $Y$ für die A-Serie.

Die Formen $\lambda \in \hat{Y}_m$ vom Niveau $m$ sind gerade die Partitionen $\lambda$ von $m$: $\hat{Y}_m = \{\lambda \vdash m\}$. Eine Partition $\lambda \in \hat{Y}_m$ ist durch eine Kante mit einer Partition $\mu \in \hat{Y}_{m+1}$ verbunden, falls man $\mu$ aus $\lambda$ durch Hinzufügen eines Kästchens erhält. Ein *Standardtableau* der Form $\lambda \vdash m$ erhält man, indem man in die Kästchen des Young-Diagramms $\lambda$ die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ so schreibt, dass sie in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten

wachsen. Jedes Tableau $T \in \mathcal{T}^\lambda$ des Bratteli-Diagramms $Y$ kann in natürlicher Weise mit einem Standardtableau der Form $\lambda$ identifiziert werden: Es sei $P$ ein Standardtableau der Form $\lambda$ und $T = (\tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m)}) \in \mathcal{T}^\lambda$ dasjenige Tableau, bei dem die Partition $\tau^{(i)}$ durch die Menge der Kästchen von $P$ gegeben ist, die die Zahlen $1, 2, \dots, i$ enthalten. Offenbar ist dies eine Bijektion zwischen der Menge der Standardtableaus $P$ der Form $\lambda$ und den Tableaus $T \in \mathcal{T}^\lambda$.
Das $r$-*abgeschnittene* Young-Gitter $Y(r)$ ist durch die Mengen

$$\hat{Y}_m(r) = \{\lambda \vdash m \mid \ell(\lambda) \le r\}$$

gegeben, dabei ist $\ell(\lambda)$ die Anzahl der Zeilen von $\lambda$. Man erhält also aus dem Young-Gitter $Y$ das $r$-abgeschnittene Young-Gitter, indem man alle Partitionen mit mehr als $r$ Zeilen entfernt sowie natürlich alle zugehörigen Kanten.
Unser Ziel ist es, die Koeffizienten $c_\lambda^\tau$, $\lambda \vdash m$ der zentralen Elemente $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^\tau$ bezüglich der minimalen zentralen Idempotente $Z_\lambda = \varrho(z_\lambda)$ zu ermitteln.
*Die A-Serie.* Für den Rest dieses Abschnitts beziehen wir uns stets auf das abgeschnittene Young-Gitter $Y(N-1)$, siehe Abbildung 4.2. In [64, Abschnitt 4] wird die von der $\hat{R}$-Matrix (2.3) erzeugte Algebra aufgefasst als ein Turm von Pfadalgebren zum abgeschnittenen Bratteli-Diagramm $Y(N-1)$. Wir zitieren [64, (4.7) Proposition] mit der notwendigen Normierung der $\hat{R}$-Matrix.

**Satz 4.22** *Es sei $S = (\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(m)})$ ein Tableau im Bratteli-Diagramm $Y(N-1)$. Dann gilt*

$$W_m = \sum_{T \in \mathcal{T}^m} (W_m)_{TT} E_{TT} \quad \textit{mit} \quad (W_m)_{TT} = q^{\nabla_m(T)},$$

*wobei*

$$\nabla_m(S) = 2(\sigma_i^{(m-1)} - i + 1) \tag{4.41}$$

*ist. Dabei erhält man $\sigma^{(m)}$, indem man in der $i$-ten Zeile von $\sigma^{(m-1)}$ ein Kästchen hinzufügt.*

Der in der Formel [64, (4.7)] bei $\nabla_m(S)$ auftretende zweite Summand $(-2m+2)/(r+1)$ entfällt in unserem Fall ($N = r+1$), da in der von uns gewählten Normierung (2.3) die $\hat{R}$-Matrix den Faktor $q^{-1/N}$ nicht enthält.
Mit Hilfe des graphischen Kalküls, vergleiche Anhang A, zeigt man leicht, dass für $T \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m-1})$ gilt

$$\mathrm{tr}_q^2(\hat{R}_{m,m+1}\, T\, \hat{R}_{m,m+1}) = \mathrm{tr}_q^2(T) + \hat{q}\mathfrak{r}\, T.$$

Insbesondere gilt dann die folgende Rekursion $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+ = \mathrm{tr}_q^2\, W_m^+ + \hat{q}\mathfrak{r}\, W_m^+$. Daher ist

$$\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+ = \hat{q}\mathfrak{r} \sum_{k=1}^m W_k^+ + \mathfrak{s}. \tag{4.42}$$

Analog zeigt man

$$\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^- = -\hat{q}\mathfrak{r}^{-1} \sum_{k=1}^m W_k^- + \mathfrak{s}.$$

In der Sprache der Pfadalgebren gilt $Z_\lambda = \sum_{T\in\mathfrak{T}^\lambda} E_{TT}$. Zur Berechnung von $c_\lambda^\tau$ genügt es daher, den Koeffizienten von $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^\tau$ vor *einem* Matrixelement, etwa vor $E_{SS}$ zu kennen. Dabei sei $S = (\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(m)})$ z. B. das Standardtableau der Form $\lambda$, bei dem die Zahlen $1, \dots, m$ zeilenweise eingetragen sind. Wegen der obigen Rekursion genügt es daher, für alle $k = 1, \dots, m$ den Koeffizienten $c_{\lambda,k}^\tau$ von $W_k^\tau$ bezüglich $E_{SS}$ zu ermitteln. Für $k < m$ benötigen wir dazu die Einbettung (4.40) von $W_k^\tau \in A_k$ in $A_m$:

$$\begin{aligned} W_k^\tau &= \sum_{P\in\mathfrak{T}^k} (W_k^\tau)_{PP}\, E_{PP}, \\ E_{PP} &= \sum_{T\in\mathfrak{T}_\mu^m} E_{P*T,\,P*T}, \quad \mu = \mathrm{shp}(P). \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung wird $E_{PP}$ auf der linken Seite als Element der größeren Algebra $A_m$ aufgefasst, während $P$ auf der rechten Seite für einen Pfad in $\hat{A}_k$ steht. Um $c_{\lambda,k}^\tau$ zu ermitteln, müssen wir also alle Teiltableaus $P = (\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)})$ von $S$ betrachten. Der zugehörige Wert ist nach Satz 4.22 gleich

$$(W_k^\tau)_{PP} = q^{\tau\nabla_k(P)}, \quad \text{wobei} \quad \nabla_k(P) = 2(j-i). \tag{4.43}$$

und $(i, j) \in \mathrm{shp}(P)$ ist das Kästchen von $\mathrm{shp}(P)$, welches am weitesten unten rechts steht. Da bei den Einbettungen von $W_k^\tau$, $k = 1, \dots, m$ in $A_m$ *jedes Kästchen* von $\lambda$ genau einmal unten rechts steht, hat man also

$$c_\lambda^\tau = \sum_{x\in\lambda} q^{2\tau c(x)}, \tag{4.44}$$

wobei $c(x) = j - i$ der Inhalt des Kästchens $(i, j) \in \lambda$ ist. Somit hat man für $\lambda \vdash m$ wegen (4.42)

$$Z_\lambda\, \mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^\tau = \left(\tau\hat{q}\,\mathfrak{r}^\tau \sum_{x\in\lambda} q^{2\tau c(x)} + \mathfrak{s}\right) Z_\lambda. \tag{4.45}$$

*Die B-, C- und D-Serien.* Wir betrachten nun das Young-Gitter $Y$ für die B-, C- und D-Serien, siehe Abbildung 4.3.

In [64, Abschnitt 5] werden die Morphismenalgebren $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes m})$, die von der $\hat{R}$-Matrix (2.9) erzeugt werden, als Turm von Pfadalgebren zum Young-Gitter $Y$ aufgefasst.
Man erhält unter Verwendung von $\hat{R} = \hat{R}^{-1} + \hat{q}I - \hat{q}K$ und des graphischen Kalküls, siehe Anhang A, die folgende Rekursionsgleichung für $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+$

$$\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+ = \mathrm{tr}_q^2\, W_m^+ + \hat{q}\mathfrak{r}\, W_m^+ - \hat{q}\mathfrak{r}^{-1}\, W_m^-.$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+ = \hat{q}\mathfrak{r} \sum_{k=1}^m W_k^+ - \hat{q}\mathfrak{r}^{-1} \sum_{k=1}^m W_k^- + \mathfrak{s}. \tag{4.46}$$

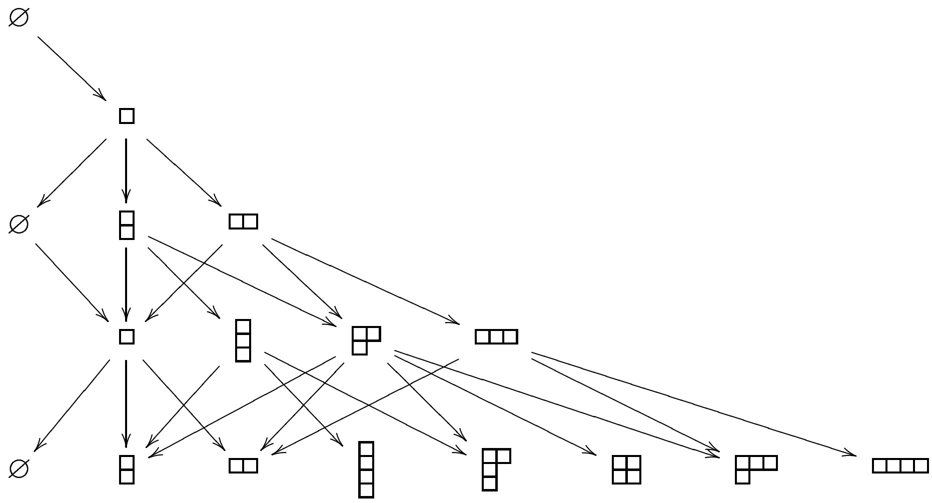


Abbildung 4.3: Das Young-Gitter für die B-, C- und D-Serien.

Für $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^-$ erhält man durch analoge Überlegungen dasselbe Ergebnis, $\mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^- = \mathrm{tr}_q^2\, W_{m+1}^+$. Wir bestimmen nun, wie im Falle der A-Serie, die Koeffizienten $c_\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \vdash m$ von $\mathrm{tr}_q^2\, W_m^+$ vor dem minimalen zentralen Idempotent $Z_\lambda$. Nach [64, Proposition (5.13)] gilt dieselbe Formel (4.43) wie im Fall der A-Serie. Es ergibt sich also für $\lambda \vdash m$

$$Z_\lambda\ \mathrm{tr}_q^2\ W_m^+ = \left(\hat{q}\,\mathfrak{r}\sum_{x\in\lambda} q^{2c(x)} - \hat{q}\,\mathfrak{r}^{-1}\sum_{x\in\lambda} q^{-2c(x)} + \mathfrak{s}\right) Z_\lambda.$$

Beachtet man $\mathfrak{r} = \epsilon q^{N-\epsilon}$, so ergibt sich

$$Z_\lambda\ \mathrm{tr}_q^2\ W_m^+ = \left(\epsilon\hat{q}^2\sum_{x\in\lambda} [\![N-\epsilon+2c(x)]\!]_q + \mathfrak{s}\right) Z_\lambda. \tag{4.47}$$

*Beweis von Lemma 4.21.* (i) Wir setzen $m := |\lambda|$, und $Z_\lambda = \varrho(z_\lambda)$ sei die Darstellung des minimalen zentralen Idempotents $z_\lambda$ der Hecke-Algebra $H_m(q)$. Nach (4.28) ist der Eigenwert $E_\lambda^\tau$ von $\mathfrak{s}X_0^\tau *$ gegeben durch

$$\mathfrak{s}X_0^\tau\big((Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\, u^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}\big) = E_\lambda^\tau\, (Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}},$$

da $h^\lambda *$ auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ als Identität wirkt ($h^\lambda$ wirkt auf $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ als Koeins) und das Argument $(Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\, u^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}$ von $\mathfrak{s}X_0^\tau$ in der obigen Formel zu $\mathcal{C}(\boldsymbol{u}^\lambda)$ gehört, vergleiche Satz 3.28 zur Definition von $\boldsymbol{u}^\lambda$. Also gilt wegen (4.45) und Lemma 4.20

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}X_0^\tau\big((Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\, u^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}\big) &= (Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\big((\mathrm{tr}_q^2\ W^\tau_{m+1})^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}} - \mathfrak{s}\,\delta^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}\big) \\ &= (Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{\jmath}}\left(z^{-\tau m}\left(\tau\hat{q}\mathfrak{r}^\tau\sum_{x\in\lambda} q^{2\tau c(x)} + \mathfrak{s}\right) - \mathfrak{s}\right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

Beachtet man $\mathfrak{s} = [\![N]\!]_q$, $\mathfrak{r} = q^N$ im Falle der A-Serie und $\mathrm{sgn}(x) = 1$ für alle $x \in \lambda$ mit $\lambda \in P_{++}$, so ergibt sich die Behauptung.

(ii) Analog zur Herleitung von (4.48) haben wir

$$\mathfrak{s}X_0\big((Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\, u^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}\big) = (Z_\lambda)^{\vec{\imath}}_{\vec{x}}\big((\mathrm{tr}^2_q\; W^\tau_{m+1})^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}} - \mathfrak{s}\,\delta^{\vec{x}}_{\vec{\jmath}}\big).$$

Setzt man (4.47) ein, so ergibt sich die Behauptung. ∎

Wir untersuchen nun für die verschiedenen Quantengruppen und deren zugehörige Partitionen $\lambda, \mu$, wann der Eigenwert $E_{\lambda\mu}$ gleich 0 wird.

**Lemma 4.23** *Es seien* $\lambda, \mu \in P(\mathcal{A})$.
(i) *Für* $\mathrm{SL}_q(N)$ *gilt* $E_{\lambda\mu} = 0$ *genau dann, wenn* $\lambda = \mu = (0)$.
(ii) *Für* $\mathrm{GL}_q(N)$ *gilt* $E_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}$. *Der Parameterwert* $z = 1$ *ist regulär. Falls* $z^N q^{-2} = \zeta$ *mit einer primitiven* $m$*-ten Einheitswurzel* $\zeta$, $m \in \mathbb{N}$, *dann gilt* $E_{\lambda\mu} = 0$ *genau dann, wenn* $\lambda = (n^N)$ *und* $\mu = (k^N)$ *für* $n, k \in m\mathbb{Z}$.
(iii) *In den Fällen* $\mathrm{Sp}_q(N)$ *und* $\mathrm{SO}_q(N)$ *gilt* $E_{\lambda\mu} = 0$ *genau dann, wenn* $\lambda = \mu = (0)$. *Im Fall* $\mathrm{O}_q(N)$ *ist* $E_{\lambda\mu} = 0$ *genau dann, wenn* $\lambda, \mu \in \{(0), (1^N)\}$.

*Beweis*. Wir fixieren $\lambda, \mu \in P_{++}$ und setzen $l := |\lambda|$. Es folgt aus Lemma 4.21 dass für die Quantengruppen $\mathrm{GL}_q(N)$ und $\mathrm{SL}_q(N)$ die Gleichung $E_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu}(q, z)$ gilt, wobei $z^N = q^2$ im Falle $\mathrm{SL}_q(N)$ und $z \neq 0$ für $\mathrm{GL}_q(N)$. Später werden wir sehen, dass diese Gleichung sogar für $\lambda, \mu \in P_+$ gilt und nicht nur für $\lambda, \mu \in P_{++}$.
Wir zeigen (i). Dazu setzen wir

$$\widetilde{E}^\tau_\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{e^\tau_\lambda(t,\, t^{2/N})}{(t - t^{-1})^2}. \tag{4.49}$$

In der Bemerkung zu Proposition 7.1 in der Arbeit [41] wurde festgestellt, dass

$$\widetilde{E}_\lambda := \widetilde{E}^+_\lambda + \widetilde{E}^-_\lambda = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(N-i)m_i}{N}\left(i(m_i + N) + 2\sum_{j=1}^{i-1} j m_j\right), \tag{4.50}$$

wobei $m_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $i = 1, \ldots, N-1$. Berechnet man andererseits die Grenzwerte (4.49) direkt mittels (4.39), so erhält man

$$\widetilde{E}^+_\lambda = \widetilde{E}^-_\lambda = \frac{1}{2N}(lN^2 + 2c(\lambda)N - l^2). \tag{4.51}$$

Beachtet man die Formeln $c(\lambda) = n(\lambda') - n(\lambda)$, $n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$ und $n(\lambda') = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2}\lambda_i(\lambda_i - 1)$, siehe etwa [67, Chapter 1], so erhält man in der Tat (4.50) aus (4.51). Da auf der rechten Seite von (4.50) nur nichtnegative Summanden auftreten, ergibt sich $\widetilde{E}^+_\lambda \geq 0$ für $\lambda \in P^0_{++}$ und $\widetilde{E}^+_\lambda = 0$ genau dann, wenn $\lambda = (0)$. Angenommen, es ist $E_{\lambda\mu} = 0$ für gewisse $\lambda, \mu \in P^0_{++}$. Da $e_{\lambda\mu}(t) := e_{\lambda\mu}(t, t^{2/N})$ eine algebraische Funktion von $t$ ist, jedoch $t = q$ eine transzendente Nullstelle ist, muss $e_{\lambda\mu}(t)$ identisch verschwinden. Insbesondere gilt

$$\lim_{t\to 1} \frac{e_{\lambda\mu}(t, t^{2/N})}{(t - t^{-1})^{-2}} = \widetilde{E}^-_\lambda + \widetilde{E}^+_\mu = 0. \tag{4.52}$$

Zusammen mit der obigen Bemerkung folgt $\lambda = \mu = (0)$.

Zu (ii). Wir fixieren $\lambda \in P_+$ und setzen wieder $l := |\lambda|$. Zunächst wollen wir zeigen, dass $E^\tau_\lambda = e^\tau_\lambda(q,z)$, d. h. wir müssen auch Young-Diagramme $\lambda$ mit „negativen Spalten“, also mit $\lambda_i < 0$, zulassen. Da wir die Eigenwert-Formel jedoch nur für $\lambda \in P_{++}$ kennen, müssen wir den Eigenwert von $\mathfrak{s}X^\tau_0$ auf Elementen $\mathcal{D}^n a$, $n \in \mathbb{Z}$ berechnen. Dazu zeigen wir, dass $\mathcal{D}^n\, a$ ein Eigenvektor für $X^\tau_0*$ ist, falls $a$ ein Eigenvektor ist, und wir berechnen den entsprechenden Eigenwert. Es sei also $\mathfrak{s}X^\tau_0 * a = E^\tau a$ mit einer komplexen Zahl $E^\tau$. Wegen $\ell^{+}{}^i_j(\mathcal{D}) = qx^{-N}\,\delta_{ij}$ und $\ell^{-}{}^i_j(\mathcal{D}) = q^{-1}y^N\,\delta_{ij}$ erhalten wir

$$\omega^\tau(\mathcal{D}) = (q^{2\tau}z^{-\tau N} - 1)\omega^\tau_0. \tag{4.53}$$

Wegen (2.31) gilt also $\omega^\tau_0 \triangleleft \mathcal{D} = q^{2\tau}z^{-\tau N}\omega^\tau_0$. Die rechtsadjungierte Wirkung von $\mathcal{D}^{-1}$ auf diese Gleichung liefert $\omega^\tau_0 \triangleleft \mathcal{D}^{-1} = q^{-2\tau}z^{\tau N}\omega^\tau_0$. Für $n \in \mathbb{Z}$ haben wir dann

$$\omega^\tau_0 \triangleleft \mathcal{D}^n = q^{2n\tau}z^{-nN\tau}\omega^\tau_0. \tag{4.54}$$

Da $\mathcal{D}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ gruppenartig ist, erhalten wir mit (2.31) und $\rho\, a = a_{(1)}\rho \triangleleft a_{(2)}$ (nach Definition der rechtsadjungierten Wirkung) aus Gleichung (4.25) die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}X^\tau_0 * (\mathcal{D}^n a) &= \mathfrak{s}\mathcal{D}^n a_{(1)} X^\tau_0(\mathcal{D}^n a_{(2)})\\
&= \mathcal{D}^n a_{(1)} g\big(\omega^\tau(\mathcal{D}^n a_{(2)}), \omega^{-\tau}_0\big)\\
&= \mathcal{D}^n a_{(1)} g(\omega^\tau_0 \triangleleft (\mathcal{D}^n a_{(2)}), \omega^{-\tau}_0) - \mathcal{D}^n a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}) g(\omega^\tau_0, \omega^{-\tau}_0)\\
&= \mathcal{D}^n a_{(1)} g(q^{2n\tau}z^{-nN\tau}\omega^\tau_0 \triangleleft a_{(2)}, \omega^{-\tau}_0) - \mathfrak{s}\mathcal{D}^n a\\
&= q^{2n\tau}z^{-nN\tau}\mathcal{D}^n a_{(1)}\big(g(\omega^\tau(a_{(2)}), \omega^{-\tau}_0) + \varepsilon(a_{(2)})\mathfrak{s}\big) - \mathfrak{s}\mathcal{D}^n a\\
&= \big(q^{2n\tau}z^{-nN\tau}(E^\tau + \mathfrak{s}) - \mathfrak{s}\big)\mathcal{D}^n a.
\end{aligned}$$

Da die Kodarstellung $\mathfrak{D}$ der Partition $(1^N)$ entspricht und $\mathfrak{s} = [\![N]\!]_q$, haben wir im Spezialfall $n = 1$ für $\lambda \in P_+$

$$E^\tau_{\lambda+(1^N)} + [\![N]\!]_q = q^{2\tau}z^{-N\tau}(E^\tau_\lambda + [\![N]\!]_q). \tag{4.55}$$

Wir zeigen, dass andererseits dieselbe Rekursion für die Funktionen $e^\tau_\lambda$ gilt:

$$e^\tau_{\lambda+(1^N)}(t,z) + [\![N]\!]_t = t^{2\tau}z^{-N\tau}(e^\tau_\lambda(t,z) + [\![N]\!]_t), \quad \lambda \in P_+. \tag{4.56}$$

Für $\lambda \in P_+$ sei $\hat\lambda = \{(i,j) \in \lambda + (1^N)\,|\,(i,j-1) \in \lambda\}$. Wie erhält man das (verallgemeinerte) Young-Diagramm $\hat\lambda$ aus $\lambda$? Im Falle $\lambda \in P_{++}$ verschiebt man $\lambda$ einfach um eine Stelle nach rechts und fügt vorn eine volle $N$-Spalte an. Ist $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$, so verschiebt man $\lambda$ nach rechts um 1 und fügt das Kästchen $(i,1)$ für alle $i = 1,\ldots,k$ an. Im Falle $0 \geq \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_N$ wird das Kästchen $(i,0)$ entfernt und der Rest wird um 1 nach rechts verschoben. Da aber die Kästchen $x$ mit $\lambda_i < 0$ eine negative Signatur haben ($\operatorname{sgn}(x) < 0$), und $|\lambda + (1^N)| = l + N$, erhalten wir aus (4.39)

$$\begin{aligned}
e^\tau_{\lambda+(1^N)}(t,z) =& z^{-\tau(l+N)}\Bigg(\llbracket N\rrbracket_t + \tau(t-t^{-1})\sum_{x\in\hat\lambda}\operatorname{sgn}(x)\,t^{\tau(N+2c(x))}+\\
&+\tau(t-t^{-1})\sum_{i=1}^{N}t^{\tau(N+2-2i)}\Bigg)-\llbracket N\rrbracket_t\\
=& z^{-\tau l-\tau N}\Bigg(\llbracket N\rrbracket_t + \tau(t-t^{-1})t^{2\tau}\sum_{x\in\lambda}\operatorname{sgn}(x)\,t^{\tau(N+2c(x))}+\\
&+\tau(t-t^{-1})(t^{\tau N}+t^{\tau(N-2)}+\cdots+t^{\tau(-N+2)})\Bigg)-\llbracket N\rrbracket_t\\
=& z^{-\tau l-\tau N}\big((1-t^{2\tau})\llbracket N\rrbracket_t + z^{\tau l}t^{2\tau}(e^\tau_\lambda(t,z)+\llbracket N\rrbracket_t)+\\
&+\tau(t-t^{-1})t^\tau\llbracket N\rrbracket_t\big)-\llbracket N\rrbracket_t\\
=& t^{2\tau}z^{-\tau N}(e^\tau_\lambda(t,z)+\llbracket N\rrbracket_t)-\llbracket N\rrbracket_t.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung benutzten wir $\tau t^\tau(t-t^{-1}) = t^{2\tau}-1$. Da es zu jedem $\lambda\in P_+$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $\lambda+(n^N)\in P_{++}$ und wegen $E^\tau_\mu = e^\tau_\mu(q,z)$ für $\mu\in P_{++}$, erhalten wir aus der Gleichheit der Rekursionsformeln (4.55) und (4.56) die Gleichheit $E^\tau_\lambda = e^\tau_\lambda(q,z)$ für $\lambda\in P_+$. Vergleicht man (4.39) und (4.32), so hat man $E_{\lambda\mu}=F_{\lambda\mu}$.
Wir zeigen nun, dass der Parameterwert $z=1$ regulär ist. Angenommen, $F_{\lambda\mu}=0$ für gewisse $\lambda,\ \mu\in P_+$. Da $e_{\lambda\mu}(t,1)$ eine rationale Funktion in $t$ ist und $q$ eine transzendente Wurzel dieser Funktion ist, gilt $e_{\lambda\mu}(t,1)\equiv 0$. Insbesondere ist $0=\lim_{t\to1}(t-t^{-1})^{-1}e_{\lambda\mu}(t,1) = |\mu|-|\lambda|$. Wir setzen $l:=|\lambda|=|\mu|$. Ferner gilt $0=\lim_{t\to1}(t-t^{-1})^{-2}e_{\lambda\mu}(t,1)$. Wegen

$$(t-t^{-1})^{-2}e_{\lambda\mu}(t,1) = \sum_{x\in\mu}\operatorname{sgn}(x)t^{\frac{N}{2}+c(x)}\left[\tfrac{N}{2}+c(x)\right]_t - \sum_{x\in\lambda}\operatorname{sgn}(x)t^{-\frac{N}{2}-c(x)}\left[-\tfrac{N}{2}-c(x)\right]_t$$

erhält man im Grenzfall $t\to1$ die Gleichung

$$lN + c(\mu)+c(\lambda) = 0. \tag{$*$}$$

Wir setzten in (4.51) $\widetilde{E}^+_\nu := (2N)^{-1}(|\nu|N^2+2c(\nu)N-|\nu|^2)$ für $\nu\in P_+$. Wegen (4.50) ist $\widetilde{E}^+_\nu\ge 0$ für $\nu\in P^0_{++}$ und $\widetilde{E}^+_\nu = 0$ nur für $\nu=(0)$. Man rechnet leicht nach, dass $\widetilde{E}^+_{\nu+(1^N)} = \widetilde{E}^+_\nu$ für alle $\nu\in P_+$. Also gilt auch $\widetilde{E}^+_\nu\ge0$ für alle $\nu\in P_+$ und $\widetilde{E}^+_\nu=0$ genau dann, wenn $\nu=(n^N)$ mit gewissem $n\in\mathbb{Z}$. Daraus folgen die beiden Ungleichungen $c(\lambda), c(\mu)\ge(2N)^{-1}(l^2-lN^2)$. Setzt man dies in die Gleichung $(*)$ ein, so erhält man $0\ge\frac{1}{N}l^2$. Da dieser Ausdruck aber stets größer oder gleich Null ist, muss Gleichheit herrschen, also $l=0$. Die Gleichheit trat aber bei der obigen Ungleichung genau dann ein, wenn $\lambda=(n^N)$ und $\mu=(k^N)$ für gewisse $n,\ k\in\mathbb{Z}$. Wegen $l=0$ ist dies nur möglich für $\lambda=\mu=(0)$. Folglich ist $z=1$ regulär.
Schließlich untersuchen wir noch den Fall $z^Nq^{-2}=\zeta$, wobei $\zeta$ eine primitive $m$-te Einheitswurzel ist ($m\in\mathbb{N}$). Es sei $\tilde z = (t^2\zeta)^{1/N}$. Dann gilt $e^\tau_{\lambda+(m^N)}(t,\tilde z) = e^\tau_\lambda(t,\tilde z)$ wegen (4.56) und $\zeta^m=1$. Folglich gilt

$$E_{\lambda+(m^N),\,\mu} = E_{\lambda,\mu} = E_{\lambda+(m^N)} = F_{\lambda+(m^N),\,\mu+(m^N)} = F_{\lambda\mu}$$

für alle $\lambda, \mu \in P_+$. Damit ist die eine Richtung der Behauptung gezeigt. Für die andere Richtung können wir voraussetzen, dass $\lambda, \mu \in P_{++}$. Da $q$ eine transzendente Wurzel der algebraischen Funktion $f(t) := e_{\lambda\mu}(t, \tilde{z})$ ist, schließen wir, dass $f(t)$ identisch Null ist. Daher ist insbesondere $\lim_{t\to\pm 1} f(t) = 0$, und aus (4.39) folgt weiter, dass $|\mu|, |\lambda| \in mN\mathbb{Z}$. Außerdem ist $\lim_{t\to 1} f(t)/(t^2-1) = 0$. Unter Verwendung von (4.51) kann man nachrechnen, dass $\lim_{t\to 1} t^{N-1} f(t)/(t^2-1)^2 = \widetilde{E}^+_\mu + \widetilde{E}^+_\lambda$. Diese Summe ist aber positiv mit Ausnahme von $\widetilde{E}^+_\mu = \widetilde{E}^+_\lambda = 0$. Letzteres ist äquivalent zu $\lambda = (k^N), \mu = (l^N)$ für gewisse $k, l \in \mathbb{Z}$. Zusammen mit $|\mu|, |\lambda| \in mN\mathbb{Z}$ erhalten wir die Behauptung.
Zu (iii). Angenommen, es ist $E_{\lambda\mu} = e_\lambda(q) + e_\mu(q) = 0$ für gewisse $\lambda, \mu \in P(\mathcal{A})$. Da $e_\lambda(t) + e_\mu(t)$ eine rationale Funktion mit der transzendenten Nullstelle $t = q$ ist, muss $e_\lambda + e_\mu \equiv 0$ gelten. Insbesondere ist

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} & \lim_{t\to 1} \frac{\epsilon z^{|\lambda|}(e_\lambda(t) + e_\mu(t))}{(t-t^{-1})^2} \\
=& (|\lambda| + |\mu|)(N-\epsilon) + 2c(\lambda) + 2c(\mu).
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Benutzt man die Ungleichung $2c(\nu)N \geq |\nu|^2 - |\nu|N^2, \nu \in P_{++}$, aus dem Beweis von (ii), dann sieht man, dass für $\lambda \neq (0)$ im Fall $\epsilon = -1$ und im Fall ($\epsilon = 1$ und $|\lambda| > N$) die Ungleichung $2c(\lambda) > -|\lambda|(N-\epsilon)$ gilt. Wegen (4.57) haben wir daher $\lambda = \mu = (0)$ oder ($\epsilon = 1$ und $|\lambda|, |\mu| \leq N$). Im letzten Fall gilt $2c(\lambda) \geq -|\lambda|^2 + |\lambda|$, wobei Gleichheit genau dann herrscht, wenn $\lambda = (1^k), 1 \leq k \leq N$, da $c(\lambda)$ am kleinsten wird, wenn alle Kästchen in der ersten Spalte sind. Setzt man dies in (4.57) ein, so erhält man $\lambda, \mu \in \{(0), (1^N)\}$. Tatsächlich gilt in diesen Fällen $E_{\lambda\mu} = 0$. ∎

### 4.3.4 Beweis von Theorem 4.18

Wir bezeichnen mit $[\rho]$ die Kohomologieklasse von $\rho \in \Gamma^\wedge$. Da $\mathrm{d}$ bikovariant ist und weil $h^\lambda * a = a * h^\lambda$ für alle $\lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$, kommutiert das Differential $\mathrm{d}$ mit den Abbildungen $h^{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu \in \widehat{\mathcal{A}}$. Insbesondere lässt sich $h^{0,0}$ zur Abbildung $h^{0,0*}\colon H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge) \to H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}})$ faktorisieren. Wegen $h^{0,0}\,\iota = \mathrm{id}$, wobei $\iota$ die Einbettung von $\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}$ in $\Gamma^\wedge$ bezeichnet, ist $h^{0,0*}$ surjektiv. Wir zeigen nun die Injektivität. Es sei $\rho \in H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge)$, insbesondere ist $\mathrm{d}\rho = 0$, und wir setzen voraus, dass $h^{0,0*}(\rho) = [\rho^{0,0}] = 0$. Wir wollen $[\rho] = 0$ zeigen.
(i) Wir betrachten zunächst den Fall (a) von Theorem 4.18 mit $\Gamma = \Gamma_{+,z}$. Nach Lemma 4.23 ist $E_{\lambda\mu} \neq 0$ genau dann, wenn $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Aus (4.17) und (4.30) erhalten wir dann

$$
\begin{aligned}
\rho^{\lambda\mu} &= (-1)^k E^{-1}_{\lambda\mu}(-\mathrm{d}\,\partial^+ + \partial^+\,\mathrm{d})\,\rho^{\lambda\mu}, \\
\rho^{\lambda\mu} &= (-1)^k E^{-1}_{\mu\lambda}(-\mathrm{d}\,\partial^- + \partial^-\,\mathrm{d})\,\rho^{\lambda\mu}
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

für alle $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Da $\mathrm{d}$ mit $h^{\lambda\mu}$ vertauscht, erhalten wir

$$\mathrm{d}\rho^{\lambda\mu} = h^{\lambda\mu}(\mathrm{d}\rho) = h^{\lambda\mu}(0) = 0.$$

Wegen (4.58) ist dann $[\rho^{\lambda\mu}] = (-1)^k E_{\lambda\mu}^{-1}[-\mathrm{d}\,\partial^+(\rho^{\lambda\mu})] = 0$ für alle $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, da die Kohomologieklasse eines Korandes Null ist. Folglich gilt

$$[\rho] = [\rho^{0,0}] + \sum_{(\lambda,\mu)\neq(0,0)} [\rho^{\lambda\mu}] = 0,$$

und $h^{0,0*}$ ist injektiv. Ganz analog zeigt man, dass auch die Einschränkungen von $h^{0,0}$ auf die Teilräume $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ bzw. $\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}$ Isomorphismen $H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge})$ bzw. $H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}) \cong H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge})$ liefern. Damit ist (a) für den Fall $\Gamma = \Gamma_{+,z}$ gezeigt. Für $\Gamma = \Gamma_{-,z}$ benutze man die zu (4.58) analogen Gleichungen

$$\rho^{\lambda\mu} = (-1)^k E_{\lambda\mu}^{-1}(-\mathrm{d}\,\partial^- + \partial^-\,\mathrm{d})\rho^{\lambda\mu},$$
$$\rho^{\lambda\mu} = (-1)^k E_{\mu\lambda}^{-1}(-\mathrm{d}\,\partial^+ + \partial^+\,\mathrm{d})\rho^{\lambda\mu}.$$

Auch in diesem Fall erhält man die Bijektivität von $h^{0,0*}$.
(ii) Man beachte, dass für alle $a \in \mathcal{A}$ mit $\mathrm{d}a = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$H_{\mathrm{de\,R}}(a\Lambda^{\wedge}) \cong aH_{\mathrm{de\,R}}(\Lambda^{\wedge}). \tag{4.59}$$

Wir betrachten die Quantengruppe $\mathrm{GL}_q(N)$ und nehmen an, dass der Parameter $z$ die Bedingung $z^N q^{-2} = \zeta$ erfüllt mit einer primitiven $m$-ten Einheitswurzel $\zeta$ ($m \in \mathbb{N}$). Man beachte ferner, dass $\mathrm{d}(\mathcal{D}^m) = 0$ wegen (4.54) und (2.31). Außerdem gilt $\Gamma_{\mathrm{L}} = \Gamma(0,0) \oplus \Gamma(0,(1,0,\dots,0,-1))$ wegen (2.44) und $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \cong \mathbf{1} \oplus \boldsymbol{u}^{(1,0,\dots,0,-1)}$. Aus der Littlewood-Richardson-Regel für die Zerlegung von Tensorprodukten von $\mathrm{GL}(N)$-Darstellungen folgt insbesondere: Ist $\boldsymbol{u}^{\nu}$ eine irreduzible Unterdarstellung von $\boldsymbol{u}^{\lambda}\otimes\boldsymbol{u}^{\mu}$, $\lambda,\mu \in P_+$, dann gilt $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$. Da die Darstellungstheorie für $\mathrm{GL}(N)$ dieselbe ist wie die Kodarstellungstheorie für $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$, da $q$ transzendent ist, folgt hieraus wegen $|(0)| = |(1,0,\dots,0,-1)| = 0$, dass

$$\Gamma_{\mathrm{L}}^{\otimes} = \bigoplus_{\mu,\,|\mu|=0} \Gamma^{\otimes}(0,\mu).$$

Auch für die äußere Algebra schließt man, dass $|\mu| = 0$ notwendig ist für $\Gamma^{\wedge}(0,\mu) \neq \{0\}$. Wegen $\Gamma^{\wedge} = \mathcal{A}\,\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$, ist somit $|\lambda| = |\mu|$ notwendig für $\Gamma^{\wedge}(\lambda,\mu) \neq \{0\}$. Zusammen mit Lemma 4.23 ergibt sich, dass $E_{\lambda\mu} = 0$ genau dann ein Eigenwert von $L_{\tau}^{\pm}$ ist, wenn $\lambda = \mu = (n^N)$ für ein $n \in m\mathbb{Z}$. Ähnlich wie in (i) schließt man nun, dass die Abbildung

$$h_{\mathcal{D}} := \sum_{n\in m\mathbb{Z}} h^{(n^N),(n^N)} \colon \Gamma^{\wedge} \to \bigoplus_{n\in m\mathbb{Z}} \Gamma^{\wedge}((n^N),(n^N)) = \bigoplus_{n\in m\mathbb{Z}} \mathcal{D}^n \Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$$

einen Isomorphismus $h_{\mathcal{D}}^* \colon H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^{\wedge}) \to \bigoplus_{n\in m\mathbb{Z}} H_{\mathrm{de\,R}}(\mathcal{D}^n\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge})$ induziert. Wegen (4.59) gilt weiter $H_{\mathrm{de\,R}}(\mathcal{D}^n\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}) = \mathcal{D}^n H_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge})$ für $n \in m\mathbb{Z}$. Damit ist die erste Isomorphie von (b) gezeigt. Wir wenden uns den links- bzw. rechtsinvarianten Formen zu. Da die Bilder der Abbildungen $h_{\mathcal{D}}\restriction\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ bzw. $h_{\mathcal{D}}\restriction\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}$ in $\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$ liegen (wieder wegen $|\mu| = 0$, genau dann, wenn $|\lambda| = 0$), definieren sie Quasiisomorphismen von $\Gamma_{\mathrm{L}}^{\wedge}$ nach $\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$ bzw. von $\Gamma_{\mathrm{R}}^{\wedge}$ nach $\Gamma_{\mathrm{Inv}}^{\wedge}$. Damit ist der $\mathrm{GL}_q(N)$-Teil von (b) bewiesen.

(iii) Wir betrachten nun den Fall $\mathrm{O}_q(N)$ und $\Gamma = \Gamma_{\pm}$. Nach Lemma 4.23 ist $E^{\lambda\mu} = 0$ genau dann ein Eigenvektor von $L^+ = L^-$, wenn $\lambda, \mu \in \{(0), (1^N)\}$. Dieselben Argumente wie in (i) führen darauf, dass

$$h_{\mathcal{D}} := h^{0,0} + h^{(0),(1^N)} + h^{(1^N),(0)} + h^{(1^N),(1^N)}$$

einen Quasiisomorphismus von $\Gamma^\wedge$ nach

$$\Gamma^\wedge(\mathbf{1},\mathbf{1}) + \Gamma^\wedge(\mathbf{1},\boldsymbol{\mathcal{D}}) + \Gamma^\wedge(\boldsymbol{\mathcal{D}},\mathbf{1}) + \Gamma^\wedge(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{D}})$$

definiert. Nach Definition von $\boldsymbol{\ell}^{\pm}$, $\hat{R}$, und $\mathcal{D}$ erhalten wir $\ell^{+}{}^i_j(\mathcal{D}) = x^{-N}\delta_{ij}$ und $\ell^{-}{}^i_j(\mathcal{D}) = y^N\delta_{ij}$ (mit den zulässigen Parametern $x$, $y$ und $z = xy$). Folglich hat man

$$X^+_{ij}(\mathcal{D}) = (z^{-N} - 1)\delta_{ij} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\mathcal{D} = (z^{-N} - 1)\mathcal{D}\omega^+_0.$$

Folglich ist $\mathrm{d}\mathcal{D} \neq 0$ bei $\mathrm{O}_q(2n+1)$ und $\Gamma_{+,-1}$. In allen anderen Fällen ist $\mathrm{d}\mathcal{D} = 0$. Wegen der Äquivalenz $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^{\mathrm{c}} \cong \boldsymbol{u}^{(2)} \oplus \boldsymbol{u}^{(11)} \oplus \mathbf{1}$, hat jede irreduzible Unterkodarstellung beliebiger Tensorpotenzen $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}})^{\otimes k}$ ein Young-Diagramm mit einer *geraden* Anzahl von Kästchen. Dies ist eine Folgerung aus der Littlewood-Richardson-Regel für orthogonale Gruppen. Also ist $\Gamma^\wedge(\lambda,\mu) = \{0\}$, falls $|\lambda| + |\mu|$ ungerade ist. Insbesondere gilt $\Gamma^\wedge(\mathbf{1},\boldsymbol{\mathcal{D}}) = \Gamma^\wedge(\boldsymbol{\mathcal{D}},\mathbf{1}) = \{0\}$, falls $N$ ungerade ist. Für gerades $N$ können diese Räume jedoch nichttrivial sein. Damit ist der Beweis von Theorem 4.18 abgeschlossen.

## 4.4 Beweis des Hodgeschen Zerlegungssatzes

In diesem Abschnitt werden wir den Beweis von Theorem 4.19 geben. Dazu benötigen wir die Begriffe der Dualität von Hopf-Bimoduln sowie die Homomorphie von Differentialkalkülen. Wir werden sehen, dass die Kalküle $\Gamma^\wedge_+$ und $\Gamma^\wedge_-$ für die Quantengruppen $\mathrm{SL}_q(N)$ und $\mathrm{GL}_q(N)$ schwach isomorph sind im Sinne von Abschnitt 4.4.1. Zusammen mit der Dualität von Differential und Kodifferential ergibt sich daraus dann der Beweis des Theorems.

### 4.4.1 Homomorphe kovariante Differentialkalküle

In diesem Teilabschnitt untersuchen wir den recht selten benutzten Begriff der Homomorphie von Differentialkalkülen. Er wurde in einer Arbeit von Pflaum und Schauenburg [79] eingeführt. Es sei $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Algebrenhomomorphismus und $\Lambda$ sei ein $\mathcal{C}$-Bimodul. Dann ist $\Lambda$ auch ein $\mathcal{B}$-Bimodul via $a \cdot \eta \cdot b := f(a)\eta f(b)$.

**Definition 4.4** (i) Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Algebren und $(\Gamma, \mathrm{d}_1)$ und $(\Lambda, \mathrm{d}_2)$ Differentialkalküle erster Ordnung über $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Das Paar $(f, F)$ bestehend aus einem Algebrenhomomorphismus $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und einem $\mathcal{B}$-Bimodulhomomorphismus $F\colon \Gamma \to \Lambda$ heißt *Homomorphismus von Differentialkalkülen erster Ordnung $\Gamma$ und $\Lambda$*, falls

$$F\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 f. \tag{4.60}$$

(ii) Es seien $\Gamma^\wedge$ und $\Lambda^\wedge$ Differentialkalküle über $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$. Ein Homomorphismus $F\colon \Gamma^\wedge \to \Lambda^\wedge$ von graduierten Algebren heißt *Homomorphismus von Differentialkalkülen $\Gamma^\wedge$ und $\Lambda^\wedge$*, falls

$$F\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 F. \tag{4.61}$$

Wir erinnern daran, dass Differentialkalküle $\Gamma^\wedge$ und $\Lambda^\wedge$ über derselben Algebra $\mathcal{A}$ isomorph heißen (im Sinne von Woronowicz [111]), wenn es einen bijektiven Bimodulhomomorphismus $F\colon \Gamma^\wedge \to \Lambda^\wedge$ vom Grad Null gibt mit $F\,\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2$ und $F_0 = \mathrm{id}$. Um mit diesem Standardbegriff nicht in Konflikt zu geraten, bezeichnen wir die bijektiv homomorphen Differentialkalküle auch als zueinander „schwach isomorph“.
Wir werden im Satz 4.26 sehen, dass die Differentialkalküle ${}_{\mathrm{W}}\Gamma_+^\wedge$ und ${}_{\mathrm{W}}\Gamma_-^\wedge$ für die Quantengruppen vom Typ A schwach isomorph sind.
Das folgende Lemma charakterisiert homomorphe linkskovariante Differentialkalküle erster Ordnung mit Hilfe ihrer Rechtsideale bzw. ihrer Quanten-Tangentialräume.

**Lemma 4.24** *Es seien $\Gamma$ und $\Lambda$ linkskovariante DKEO über den Hopfalgebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Ihre assoziierten Rechtsideale seien $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{S}$, und ihre Quanten-Tangentialräume seien $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Es sei $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Hopfalgebren-Homomorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{S}$.
(ii) $f^{\mathsf{t}}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$.
(iii) *Es existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $(f, F)$ von linkskovarianten DKEO $\Gamma$ und $\Lambda$.*

*Beweis*. (iii) $\to$ (i). Es seien $\omega_\Lambda$ und $\omega_\Gamma$ die $\omega$-Abbildungen zu $\Lambda$ bzw. $\Gamma$. Da $f$ ein Morphismus von Hopfalgebren ist und $F(a\,\mathrm{d}b) = f(a)\mathrm{d}f(b)$, erhalten wir für alle $r \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\omega_\Lambda(f(r)) &= S\big(f(r)_{(1)}\big)\mathrm{d}f(r)_{(2)} = S(f(r_{(1)}))\mathrm{d}f(r_{(2)})\\ &= f(S(r_{(1)}))F(\mathrm{d}r_{(2)}) = F(\omega_\Gamma(r)) = 0.\end{aligned} \tag{4.62}$$

Außerdem gilt $\varepsilon(f(r)) = \varepsilon(r) = 0$ und somit $f(r) \in \mathcal{S}$.
(i) $\to$ (ii). Da $\mathcal{S}$ und $\mathcal{Y}$ bezüglich der dualen Paarung von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^\circ$ zueinander orthogonale Teilräume sind, gilt $f^{\mathsf{t}}(Y)(r) = Y(f(r)) \in Y(\mathcal{S}) = \{0\}$ für alle $r \in \mathcal{R}$ und $Y \in \mathcal{Y}$. Darüber hinaus ist $f^{\mathsf{t}}(Y)(1) = Y(f(1)) = Y(1) = 0$ und folglich $f^{\mathsf{t}}(Y) \in \mathcal{X}$.
(ii) $\to$ (iii). Durch die Gleichung (4.60) ist die Abbildung $F$ eindeutig bestimmt, nämlich $F(a_i\mathrm{d}b_i) := f(a_i)\,\mathrm{d}f(b_i)$. Wir zeigen, dass $F$ wohldefiniert ist. Dazu seien $\{\omega_i\}$ und $\{\eta_j\}$ Vektorraumbasen von $\Gamma_{\mathrm{L}}$ bzw. $\Lambda_{\mathrm{L}}$. Ihre Dualbasen seien $\{X_i\}$ bzw. $\{Y_j\}$. Nach Voraussetzung existieren komplexe Zahlen $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, so dass $f^{\mathsf{t}}(Y_j) = \alpha_{ij}X_i$. Angenommen, $a_i\mathrm{d}b_i = 0$. Dann gilt wegen (2.30) $0 = a_i(X_k * b_i)\omega_k$ und folglich $0 = a_i(X_k * b_i)$ für alle $k$. Benutzt man dies, so erhält man

$$\begin{aligned}f(a_i)\mathrm{d}f(b_i) &= f(a_i)f(b_{i(1)})\omega_\Lambda(f(b_{i(2)})) = f(a_i)f(b_{i(1)})Y_j(f(b_{i(2)}))\eta_j\\ &= f(a_ib_{i(1)})f^{\mathsf{t}}(Y_j)(b_{i(2)})\eta_j = \alpha_{kj}f(a_ib_{i(1)})X_k(b_{i(2)})\eta_j\\ &= \alpha_{kj}f(a_i(X_k * b_i))\eta_j = 0.\end{aligned}$$

Die Abbildung $F$ ist also wohldefiniert. ∎

**Lemma 4.25** *Es seien $\Gamma^\wedge$ und $\Lambda^\wedge$ linkskovariante Differentialkalküle über den Hopfalgebren $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Ferner sei $F\colon \Gamma^\wedge \to \Lambda^\wedge$ ein Homomorphismus von Differentialkalkülen und seine Komponente $F_0$ ein Hopfalgebren-Homomorphismus. Dann gilt $(F_0 \otimes F)\Delta_{\mathrm{L}} = \Delta_{\mathrm{L}} F$ und $F(\rho \triangleleft a) = F\rho \triangleleft F_0 a$ für $\rho \in \Gamma^\wedge$ und $a \in \mathcal{A}$.*

Der Beweis benutzt nur die Kovarianz von $\mathrm{d}$, die Eigenschaften von $F_0$ und Standardschlüsse. Wir lassen ihn daher weg. Ersetzt man im obigen Lemma die linke Kovarianz durch die rechte, so lautet die erste Aussage $(F \otimes F_0)\Delta_{\mathrm{R}} = \Delta_{\mathrm{R}} F$.
Wir werden nun sehen, dass die Differentialkalküle $\Gamma_+^\wedge$ und $\Gamma_-^\wedge$ zueinander schwach isomorph sind.

**Satz 4.26** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Koordinatenhopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$, $\Gamma_+ = \Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_- = \Gamma_{-,z}$. Für $k = 1, \dots, N$ setzen wir $k' = N + 1 - k$.*
(i) *Es gibt einen eindeutig bestimmten bijektiven Homomorphismus $F\colon \Gamma_+^\wedge \to \Gamma_-^\wedge$ von Differentialkalkülen derart, dass*

$$F(u^a_b) = S(u^{b'}_{a'}), \quad a, b = 1, \dots, N. \tag{4.63}$$

(ii) *Für $\lambda, \mu \in \widehat{\mathcal{A}}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Einschränkung von $F$ auf $\Gamma_+^{\wedge k}(\lambda, \mu)$ eine bijektive Abbildung auf $\Gamma_-^{\wedge k}(\lambda^{\mathsf{c}}, \mu^{\mathsf{c}})$.*

*Beweis.* (a) Die Existenz eines eindeutig bestimmten Hopfalgebren-Automorphismus $F_0\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit (4.63) wurde in Satz 3.30 gezeigt.
(b) Wir müssen nachweisen, dass sich $F$ zu einem Morphismus von $\Gamma_{+,z}$ nach $\Gamma_{-,z}$ fortsetzen lässt. Dazu benutzen wir das Kriterium aus Lemma 4.24 (ii): $F^{\mathsf{t}}(\mathcal{X}^-) \subseteq \mathcal{X}^+$. Da $F$ ein Koalgebrenhomomorphismus ist, ist $F^{\mathsf{t}}$ multiplikativ auf der von den Matrixelementen $\ell^{\pm a}{}_b$, $a, b = 1, \dots, N$ erzeugten Unteralgebra von $\mathcal{A}^\circ$. Wir berechnen $F^{\mathsf{t}}(\ell^{\pm a}{}_b)$ auf den erzeugenden Elementen von $\mathcal{A}$. Wegen (2.15) und (3.49) hat man

$$\begin{aligned} F^{\mathsf{t}}(\ell^{\pm a}{}_b)(u^r_s) &= \ell^{\pm a}{}_b(F(u^r_s)) = \ell^{\pm a}{}_b(S(u^{s'}_{r'})) \\ &= p^{\pm 1}(\hat{R}^{\mp 1})^{s'a}_{br'} = p^{\pm 1}(\hat{R}^{\mp 1})^{rb'}_{a's} = \ell^{\pm b'}{}_{a'}(S(u^r_s)) = S(\ell^{\pm b'}{}_{a'})(u^r_s), \end{aligned}$$

wobei $p = x$ im Falle $\boldsymbol{\ell}^+$ und $p = y$ im Falle von $\boldsymbol{\ell}^-$. Da sowohl $F^{\mathsf{t}}(\ell^{\pm a}{}_b)$ als auch $S(\ell^{\pm b'}{}_{a'})$ Darstellungen von $\mathcal{A}$ sind, erhalten wir $F^{\mathsf{t}}(\ell^{\pm a}{}_b) = S(\ell^{\pm b'}{}_{a'})$. Nach [84, Theorem 9.1] ist

$$\ell^{+r}{}_v\, S(\ell^{-w}{}_s)\, \hat{R}^{vb}_{wc} = \hat{R}^{rv}_{sw} S(\ell^{-b}{}_v)\, \ell^{+w}{}_c.$$

Multipliziert man diese Relation mit $D^s_r$ und beachtet $D^s_r \hat{R}^{rv}_{sw} = \mathfrak{r}\delta_{vw}$, erhält man

$$D^s_r \ell^{+r}{}_v S(\ell^{-w}{}_s)\, \hat{R}^{vb}_{wc} = \mathfrak{r} S(\ell^{-b}{}_v)\ell^{+v}{}_c.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(\hat{R}^{-1})^{mc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_k$ und benutzt die Identität $\hat{R}^{vb}_{wc}(\hat{R}^{-1})^{mc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_k = \delta_{vn}\delta_{wm}$, vergleiche (A.2), hat man

$$D^s_r\, \ell^{+r}{}_k S(\ell^{-m}{}_s) = \mathfrak{r} S(\ell^{-b}{}_v)\ell^{+v}{}_c\, (\hat{R}^{-1})^{mc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_k. \tag{4.64}$$

Mit (2.47), (4.64), $(\hat{R}^{-1})^{jc}_{na}(D^{-1})^a_c = \mathfrak{r}^{-1}\delta_{jn}$ und $d_k^{-1} = d_{k'}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} F^{\mathfrak{t}}(X^-_{i'j'}) &= F^{\mathfrak{t}}\big((D^{-1})^k_l S^{-1}(\ell^{+i'}_{\ \ k})\ell^{-l}_{\ \ j'}\big) - (D^{-1})^{i'}_{j'} \\ &= (D^{-1})^k_l S^{-1}(S(\ell^{+k'}_{\ \ i}))S(\ell^{-j}_{\ \ l'}) - D^i_j \\ &= D^{l'}_{k'}\ell^{+k'}_{\ \ i} S(\ell^{-j}_{\ \ l'}) - D^i_j \\ &= \mathfrak{r}S(\ell^{-b}_{\ \ v})\ell^{+v}_{\ \ c}(\hat{R}^{-1})^{jc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_i - D^i_j \\ &= \mathfrak{r}(X^+_{bc} + \delta_{bc})(\hat{R}^{-1})^{jc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_i - D^i_j \\ &= \mathfrak{r}X^+_{bc}(\hat{R}^{-1})^{jc}_{na}(D^{-1})^a_b D^n_i. \end{aligned}$$

Damit liegt $F^{\mathfrak{t}}(\mathcal{X}^-)$ in $\mathcal{X}^+$ und der Beweis von (b) ist abgeschlossen. Wir bemerken, dass $F^{\mathfrak{t}}\colon \mathcal{X}^- \to \mathcal{X}^+$ bijektiv ist, da $X^+_{ab} = \mathfrak{r}^{-1}F^{\mathfrak{t}}(X^-_{i'j'})(D^{-1})^i_k \hat{R}^{ka}_{lb}D^l_j$. Nach Lemma 4.24 ist $F(a\mathrm{d}b) := F(a)\mathrm{d}F(b)$ eine wohldefinierte $\mathcal{A}$-Modulabbildung von $\Gamma_+$ nach $\Gamma_-$. Analog zeigt man, dass $F^{-1}\colon \Gamma_- \to \Gamma_+$ mit $F^{-1}(a\mathrm{d}b) := F^{-1}(a)\mathrm{d}F^{-1}(b)$ eine wohldefinierte $\mathcal{A}$-Modulabbildung ist, die zu $F$ invers ist.
(c) Wir betrachten nun die höheren Formen. Für $\tau \in \{+,-\}$ bezeichne $F^\tau$ die Abbildung $F$ bzw. $F^{-1}$, je nachdem ob $\tau = +$ oder $\tau = -$. Da $F^\tau$ eine $\mathcal{A}$-Bimodulabbildung ist, können wir $F^\tau$ zu einem Algebrenhomomorphismus $F^\tau\colon \Gamma^{\otimes}_\tau \to \Gamma^{\otimes}_{-\tau}$ fortsetzen. Wir zeigen, dass $F$ mit der Zopfung $\sigma$ vertauschbar ist: $F\sigma = \sigma F$ auf $\Gamma_+^{\otimes 2}$. Da sowohl $F$ als auch $\sigma$ Bimodulabbildungen sind und $\Gamma_+ \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma_+$ eine freie Basis aus linksinvarianten Elementen besitzt, genügt es, die Gleichung für linksinvariante Elemente zu zeigen. Es seien $\rho,\ \xi \in (\Gamma_+)_{\mathrm{L}}$. Nach (2.23) und Lemma 4.25 gilt

$$\begin{aligned} F\sigma(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \xi) &= F(\xi_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} (\rho \triangleleft \xi_{(1)})) = F(\xi_{(0)}) \otimes_{\mathcal{A}} F(\rho \triangleleft \xi_{(1)}) \\ &= (F\xi)_{(0)} \otimes_{\mathcal{A}} (F\rho \triangleleft (F\xi)_{(1)}) = \sigma(F\rho \otimes_{\mathcal{A}} F\xi). \end{aligned}$$

Damit vertauscht $F$ mit dem Antisymmetrisator $A_2$. Induktiv zeigt man, dass $F$ auch mit dem Antisymmetrisator $A_k$, $k \in \mathbb{N}$ vertauschbar ist. Dasselbe gilt für $F^{-1}$. Somit ist $F^\tau\colon \Gamma^\wedge_\tau \to \Gamma^\wedge_{-\tau}$ eine wohldefinierte Abbildung mit $F\,F^{-1} = F^{-1}F = \mathrm{id}$. Nach Lemma 4.25 und Satz 3.30 folgt $F(\Gamma_+^{\wedge k}(\lambda,\mu)) \subseteq \Gamma_-^{\wedge k}(\lambda^{\mathfrak{c}},\mu^{\mathfrak{c}})$. Da $F^{-1}\colon \Gamma^\wedge_- \to \Gamma^\wedge_+$ ebenfalls die Voraussetzungen von Lemma 4.25 erfüllt, folgt, dass $F^{-1}\lceil \Gamma_-^{\wedge k}(\lambda^{\mathfrak{c}},\mu^{\mathfrak{c}})$ die Umkehrabbildung zu $F\lceil \Gamma_+^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ ist. Damit ist alles gezeigt. ■

**Bemerkung 4.6** Für die Quantengruppen der B-, C- und D-Serien sind die Differentialkalküle $\Gamma^\wedge_{+,z}$ und $\Gamma^\wedge_{-,z}$, sogar isomorph im starken Sinne ($F_0 = \mathrm{id}$). □

Nun können wir den Beweis von Theorem 4.19 durchführen. Nach Theorem 3.12 (iii) verschwindet das Differential $\mathrm{d}$ auf dem Raum $\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$. Folglich ist $H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge_{\mathrm{Inv}}) \cong \Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}}$. Zusammen mit Theorem 4.18 erhält man (4.35). Wegen $\Gamma^{\wedge k}_{\mathrm{Inv}} = \Gamma^{\wedge k}(0,0)$ folgt aus (4.29), dass $H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma^\wedge)$ ein direkter Summand in (4.34) ist. Nach (4.58) erhalten wir für $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ die Formeln

$$\begin{aligned} \Gamma^{\wedge k}_\tau(\lambda,\mu) &= \mathrm{d}\Gamma^{\wedge k-1}_\tau(\lambda,\mu) + \partial^+\Gamma^{\wedge k+1}_\tau(\lambda,\mu), \\ \Gamma^{\wedge k}_\tau(\lambda,\mu) &= \mathrm{d}\Gamma^{\wedge k-1}_\tau(\lambda,\mu) + \partial^-\Gamma^{\wedge k+1}_\tau(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass beide Zerlegungen direkt sind. Da alle in der obigen Gleichung auftretenden Räume endlichdimensional sind, siehe Beweis von Satz 4.14 (i), genügt es, ihre Dimensionen zu vergleichen. Wir bezeichnen die Einschränkung einer linearen Abbildungen $f\colon \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$ auf den Raum $\Gamma^{\wedge k}(\lambda,\mu)$ mit $f^{k,\lambda,\mu}$. Nach Satz 4.14 ist

$$\mathrm{rg}\,\partial_\tau^{\pm,k+1,\lambda,\mu} = \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_{-\tau}^{k,\lambda^{\mathsf{c}},\mu^{\mathsf{c}}},$$

da $\mathrm{d}_{-\tau}^{k,\lambda^{\mathsf{c}},\mu^{\mathsf{c}}}$ wie auch $\partial_\tau^{\pm,k+1,\lambda,\mu}$ zueinander duale lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Räumen sind. Nach Satz 4.26 gilt $\mathrm{d}_{-}^{k,\lambda^{\mathsf{c}},\mu^{\mathsf{c}}}F = F\mathrm{d}_{+}^{k,\lambda,\mu}$, und $F$ ist bijektiv. Daher stimmen die Ränge von $\mathrm{d}_{-\tau}^{k,\lambda^{\mathsf{c}},\mu^{\mathsf{c}}}$ und $\mathrm{d}_{\tau}^{k,\lambda,\mu}$ überein. Somit hat man

$$\mathrm{rg}\,\partial_\tau^{\pm,k+1,\lambda,\mu} = \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_{-\tau}^{k,\lambda^{\mathsf{c}},\mu^{\mathsf{c}}} = \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_{\tau}^{k,\lambda,\mu}.$$

Wegen $H^k_{\mathrm{de\,R}}(\Gamma_\tau^\wedge(\lambda,\mu)) = \{0\}$ ist $\dim\ker \mathrm{d}_\tau^{k,\lambda,\mu} = \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_\tau^{k-1,\lambda,\mu}$. Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim \Gamma_\tau^{\wedge k}(\lambda,\mu) &= \dim\ker \mathrm{d}_\tau^{k,\lambda,\mu} + \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_\tau^{k,\lambda,\mu}\\ &= \mathrm{rg}\,\mathrm{d}_\tau^{k-1,\lambda,\mu} + \mathrm{rg}\,\partial_\tau^{\pm,k+1,\lambda,\mu}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Summen in (4.65) direkt sind. Damit ist der Beweis von Theorem 4.19 abgeschlossen.

**Bemerkung 4.7** Der Beweis des abgeschwächten Zerlegungssatzes für die Quantengruppen der B-, C- und D-Serien, vgl. Bemerkung 4.5, verläuft völlig analog zu den obigen Argumenten. Anstelle von $F$ wähle man den starken Isomorphismus der Kalküle $\Gamma_{+,z}$ und $\Gamma_{-,z}$. □

# Anhang A

# Rechnen mit Morphismen

In diesem Anhang ergänzen wir ohne Beweise häufig verwendete Formeln, die Morphismen von Kodarstellungen der Koordinatenhopfalgebren enthalten. Einige Beweise findet man in [92, Lemma 3.2 und Lemma 3.4].

Wir fassen zunächst die Formeln zusammen, die für alle vier Serien gelten. Ist $x$ ein zulässiger Parameter, so gilt

$$\begin{aligned} \grave{R}^{-}{}^{ab}_{rs} &:= x^{-1}\, \boldsymbol{r}_x(u^b_r, S(u^s_a)) = D^a_z (\hat{R}^{-1})^{by}_{zr} (D^{-1})^y_s, \\ \check{R}^{-}{}^{ab}_{rs} &:= x^{-1}\, \boldsymbol{r}_x(S(u^a_s), u^b_r) = \hat{R}^{-1}{}^{sr}_{ba}, \\ \acute{R}^{ab}_{rs} &:= x\, \boldsymbol{r}_x(S^2(u^r_a), u^b_s) = \hat{R}^{ra}_{sb}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Wir wiederholen einige bekannte Eigenschaften von $\acute{R}$ und $\grave{R}^{\pm}$, siehe etwa [92, Lemma 3.3 und Lemma 3.4]:

$$\acute{R}^{\pm}\grave{R}^{\mp} = \grave{R}^{\mp}\acute{R}^{\pm} = I, \tag{A.2}$$

$$\grave{R}^{-}_{23}\grave{R}^{-}_{12}\check{R}^{-1}_{23} = \check{R}^{-1}_{12}\grave{R}^{-}_{23}\grave{R}^{-}_{12}, \qquad \grave{R}^{-}_{12}\grave{R}^{-}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\grave{R}^{-}_{12}\grave{R}^{-}_{23}. \tag{A.3}$$

Wir wollen an dieser Stelle eine kleine Einführung in den graphischen Kalkül geben, wie er in den Arbeiten [91, 92, 95, 96] verwendet wurde. Die Exaktheit dieses Kalküls wurde in [103] gezeigt. In [95, Abschnitt 1.5.3] wurde nachgewiesen, dass die $\hat{R}$-Matrizen der vier klassischen Serien, mit einem Normierungsfaktor versehen, die Voraussetzungen von Lemma 4.3 in [103] erfüllen. Verwendet man den graphischen Kalkül, so werden Formeln und Beweise einfacher und anschaulicher. Im übrigen lässt sich jeder graphische Beweis in einen algebraischen Beweis zurück übersetzen.

Die Eckpunkte eines Graphen sind stets mit den Kodarstellungen $\boldsymbol{u}$ bzw. $\boldsymbol{u}^{\mathrm{c}}$ beschriftet, je nachdem, ob die zugehörige Kante nach unten bzw. oben gerichtet ist. Diese Markierungen sind nicht extra angebracht, da sie ja aus der Pfeilrichtung abzulesen sind. Befindet sich unten oder oben keine Ecke, was etwa bei Bögen auftritt, so ist die triviale Kodarstellung $\mathbf{1}$ dafür einzusetzen.

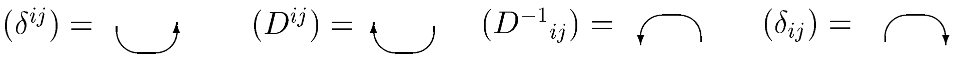



Abbildung A.1: Die vier Bogenmorphismen.

Ferner benutzen wir die Matrizen

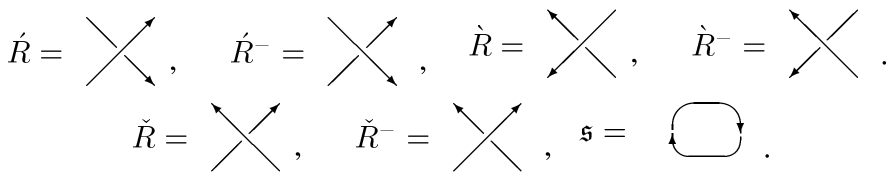



Abbildung A.2: Die gedrehten $\hat{R}$-Matrizen und die Zahl $\mathfrak{s}$.

Ähnlich zur in (4.38) definierten Spur $\mathrm{tr}_q^2$ definieren wir für $T = (T^{ab}_{st}) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$ die $q$-Spur $\mathrm{tr}_q^1 T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)$ durch $(\mathrm{tr}_q^1 T)^b_t = D^s_a T^{ab}_{st}$. Durch Komposition der gedrehten $\hat{R}$-Matrizen mit den oben angegebenen Bögen ergeben sich die folgenden Formeln.

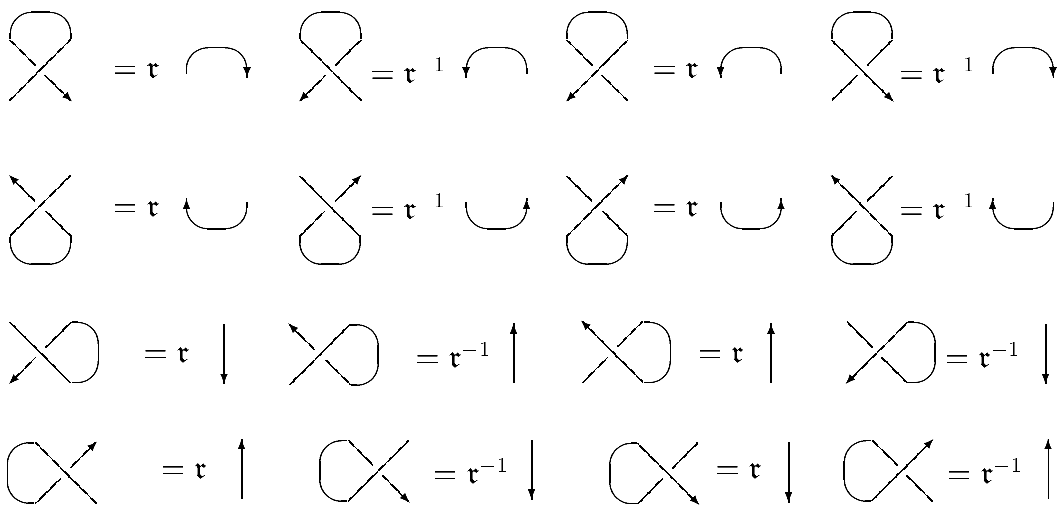



Abbildung A.3: Die Spuren der verschiedenen $\hat{R}$-Matrizen.

## A.1 Die A-Serie

Die folgenden Gleichungen gelten im Falle der A-Serie.

$$\acute{R}^{xy}_{bz}\acute{R}^{yu}_{zk} = \delta_{xu}\delta_{bk} + \hat{q}\acute{R}^{xu}_{bk}, \tag{A.4}$$

$$\sum_{i,j} q^{2s-2j}(\hat{P}^{\pm})^{in}_{jm}(\hat{P}^{\pm})^{js}_{ir} = [\![2]\!]_q^{-2}(\delta_{nr}\delta_{ms} + \mathfrak{s}_{\pm}q^{2s}\delta_{nm}\delta_{rs}),$$
$$\sum_{i,j} q^{-2i}\hat{R}^{ik}_{jl}\hat{R}^{jm}_{in} = q^{-2m}\delta_{kn}\delta_{lm} + q^{-1}\hat{q}\delta_{kl}\delta_{mn}. \tag{A.5}$$

Die Morphismenalgebren $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ , $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}})$ und $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}\otimes\boldsymbol{u})$ sind alle zweidimensional. Ihre Basen sind wie folgt gegeben.

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = \langle \hat{R}, \hat{R}^{-1}\rangle, \qquad \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}) = \langle \check{R}^{+}, \check{R}^{-}\rangle, \tag{A.6}$$

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}\otimes\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}) = \langle \acute{R}^{+}, \acute{R}^{-}\rangle, \qquad \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}, \boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}\otimes\boldsymbol{u}) = \langle \grave{R}^{+}, \grave{R}^{-}\rangle,$$
$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^{\mathfrak{c}}) = \langle P_0, P_1\rangle, \tag{A.7}$$

wobei die Idempotente $P_0$ und $P_1$ die Gestalt

$$(P_0)^{ab}_{rs} = \frac{1}{\mathfrak{s}}D^a_b\delta_{rs} \quad \text{und} \quad P_1 = I - P_0 \tag{A.8}$$

haben. Die $\hat{R}$-Matrix erfüllt die Hecke-Relation $\hat{R}^{-1} = \hat{R} - \hat{q}I$.

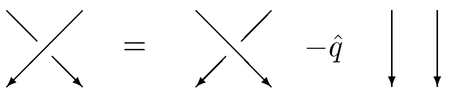



Abbildung A.4: Die Hecke-Bedingung.

Aus der Hecke-Relation und den Spurformeln erhält man die folgenden Formeln.

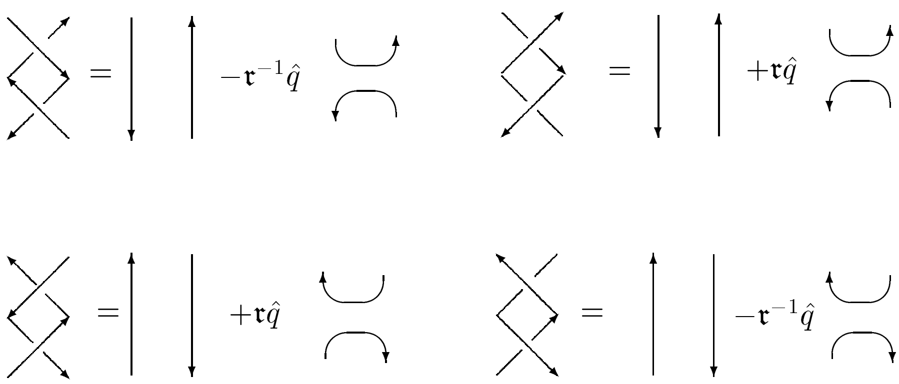



Abbildung A.5: Die Produkte der verdrehten $\hat{R}$-Matrizen.

## A.2 Die B-, C- und D-Serien

Die Besonderheit der orthogonalen und symplektischen Gruppen ist, dass die Fundamentaldarstellung $\boldsymbol{u}$ isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung $\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}}$ ist. Definiert man die Tensoren $(C^{ab}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$ und $(C_{ab}) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N, \mathbb{C})$ vermöge $C^{ab} = C^a_b$ und $C_{ab} = C^a_b$ (und die entsprechenden Tensoren für $B = C^{-1}$), so gilt

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = \langle (C^{ab}) \rangle,\ \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, \mathbf{1}) = \langle (C_{ab}) \rangle,\ \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}}, \boldsymbol{u}) = \langle C^{\mathfrak{t}} \rangle. \tag{A.9}$$

Eng verbunden mit der Kodarstellungstheorie der orthogonalen und symplektischen Quantengruppen ist die Birman-Wenzl-Murakami-Algebra. Sie übernimmt im Quantenfall die Rolle der Brauer-Algebra, siehe auch [106], [11] und [62, Teilabschnitt 8.6.4].

**Definition A.1** Es seien $q, r \in \mathbb{C}^\times$ mit $q^2 \neq 1$ komplexe Parameter und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Die *Birman-Wenzl-Murakami-Algebra* $\mathrm{BWM}_k(q, r)$ ist die komplexe Algebra mit Eins, die von den invertierbaren Elementen $g_1, \ldots, g_{k-1}$ und den Relationen (3.4), (3.5) (mit $g_i$ anstelle von $b_i$) sowie den Relationen

$$e_i\, g_i = g_i\, e_i = r^{-1} e_i, \qquad e_i\, g_{i\pm1} e_i = r e_i, \qquad e_i\, g_{i\pm1}^{-1} e_i = r^{-1} e_i$$

erzeugt wird, wobei

$$e_i := 1 - (g_i - g_i^{-1})/(q - q^{-1}).$$

Aus der obigen Definition folgt, dass $e_i$ wesentlich idempotent ist mit $e_i^2 = x\, e_i$ und $x = 1 + (r - r^{-1})/(q - q^{-1})$. Ferner erfüllt $g_i$ die kubische Gleichung

$$(g_i - q)(g_i + q^{-1})(g_i - r^{-1}) = 0.$$

Analog zu der Tatsache, dass für die A-Serie die Matrizen $\hat{R}$ und $\check{R}$ Darstellungen der Hecke-Algebra definieren, gilt für die $\hat{R}$-Matrizen der B-, C- und D-Serien:

**Satz A.1** *Es sei $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_q(N))$ und $\hat{R}$ die zugehörige $\hat{R}$-Matrix. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Dann definieren die Abbildungen $g_i \mapsto \hat{R}_{i,i+1}$ und $g_i \mapsto \check{R}_{i,i+1}$ surjektive Darstellungen $\varrho\colon \mathrm{BWM}_k(q, \mathfrak{r}) \to \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^{\otimes k})$ bzw. $\varrho_{\mathsf{c}}\colon \mathrm{BWM}_k(q, \mathfrak{r}) \to \mathrm{Mor}((\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})^{\otimes k})$ der Birman-Wenzl-Murakami-Algebra.*

Bei der Darstellung $\varrho$ wird ferner $e_i$ auf $K_{i,i+1}$ abgebildet.

Wir geben nun eine kurze Einführung in den modifizierten graphischen Kalkül im B-, C- und D-Fall. Der Unterschied beruht vor allem auf der Existenz eines zusätzlichen Morphismus $(C^{ab})$, der im Falle der A-Serie nicht präsent ist. Da im orthogonalen und symplektischen Fall die Kodarstellungen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}^{\mathsf{c}}$ zueinander isomorph sind, $C^{\mathfrak{t}} \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{\mathsf{c}})$, existieren hier von oben nach unten laufende Kanten, deren Ecken verschieden orientiert sind. So wird etwa der obige Morphismus $C^{\mathfrak{t}}$ durch eine vertikale Kante repräsentiert, die an der unteren Ecke einen Pfeil nach unten hat und an der oberen Ecke einen Pfeil nach oben. Es zeigt sich, dass in diesem Kalkül drei auf einer Kante aufeinanderfolgende Pfeilrichtungen $aba$ (mit entgegengesetzten

Orientierungen $a$ und $b$) durch einen Pfeil der Orientierung $a$ ersetzt werden können. Entfernt man eine Schlinge durch Drehen im Uhrzeigersinn (erste Reidemeister-Bewegung), liefert das den Faktor $\mathfrak{r}$, dreht man die Schlinge entgegen dem Uhrzeiger heraus, erfordert das den Faktor $\mathfrak{r}^{-1}$. Ein geschlossener Ring liefert den Faktor $\mathfrak{s}$.
Es gelten die folgenden, gut bekannten Relationen zwischen den Matrizen $\hat{R}$, $\hat{R}^{-1}$, $K$ und $D$, siehe etwa [92] oder [95]:

$$\hat{R}^{-1} = \hat{R} - \hat{q}I + \hat{q}K \tag{A.10}$$

$$C^y_z \hat{R}^{yz}_{st} = \mathfrak{r}^{-1} C^s_t, \qquad \hat{R}^{ab}_{yz} C^y_z = \mathfrak{r}^{-1} C^a_b, \tag{A.11}$$

$$\hat{R} - \hat{R}^{-1} = \hat{q}(I - K), \tag{A.12}$$

$$\mathfrak{s} = \operatorname{tr} D, \tag{A.13}$$

$$\operatorname{tr}^1_q \hat{R} = \mathfrak{r} I, \qquad \operatorname{tr}^1_q I = \mathfrak{s} I, \quad \operatorname{tr}^1_q K = I. \tag{A.14}$$

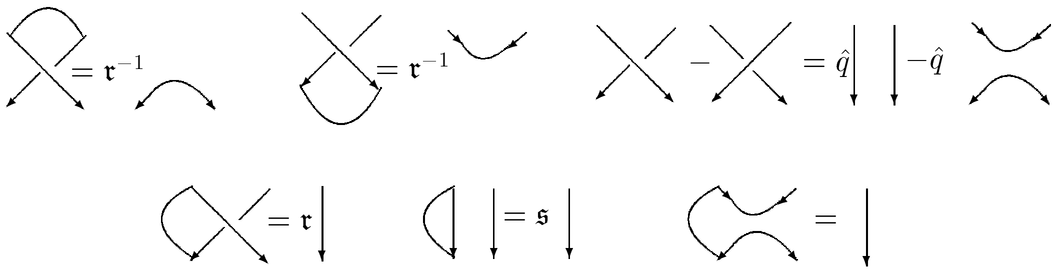



Abbildung A.6: Die graphische Darstellung der Gleichungen (A.11), (A.12) und (A.14).

# Anhang B

# Die biinvarianten 2-Formen in ${}_{\mathfrak{u}}\varGamma^{\wedge}$

## B.1 Beweis von Lemma 3.38 (i) und (ii)

In diesem Anhang wollen wir Lemma 3.38 beweisen. Bevor wir jedoch den Beweis des obigen Lemmas antreten können, benötigen wir noch die definierenden Parameter der Kalküle sowie ein technisches Lemma, das die Abbildung $\mathcal{S}$ mit Hilfe von Projektoren und Maurer-Cartan-Formen ausdrückt. Zunächst erwähnen wir die Größen der definierenden Parameter, wie sie auch in den Arbeiten [91, 92] verwendet wurden. Um doppelte Bezeichnungen zu vermeiden, mussten allerdings einige Umbenennungen vorgenommen werden. Außerdem wurde beim Kalkül $\varGamma_{+,z}$ der Parameter $z$ aus [91] in $z^{-1}$ umbenannt. Im folgenden durchlaufen die Parameter $\tau$ und $\epsilon$ stets die Vorzeichenmenge $\{+,-\}$. Dabei bezieht sich $\tau$ stets auf den Kalkül $\varGamma_{\tau,z}$ und $\epsilon$ auf den Projektor $\hat{P}^{\epsilon}$. Es seien $r_+ = 1-q^{-2} = q^{-1}\hat{q}$ und $r_- = -q^{-2N}+q^{-2N-2} = -q^{-2N-1}\hat{q}$. Wir setzen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u} &= q^{N+1}\mathfrak{s} = q^{-2}+q^{-4}+\cdots+q^{-2N}, & & \\
\mathfrak{s}_+ &= 1+\mathfrak{u}+q^{-2N-2}, & \mathfrak{s}_- &= \mathfrak{u}-q^{-2}-q^{-2N}, \\
\mathfrak{s}'_+ &= \mathfrak{u}-q^{-2}+1, & \mathfrak{s}'_- &= \mathfrak{u}-q^{-2N}+q^{-2N-2}, \\
\mathfrak{s}^+_+ &= \mathfrak{u}-q^{-2}+q^{2}, & \mathfrak{s}^-_+ &= \mathfrak{u}-q^{-4}+1, \\
\mathfrak{s}^+_- &= \mathfrak{u}-q^{-2N}+q^{-2N-4}, & \mathfrak{s}^-_- &= \mathfrak{u}-q^{-2N+2}+q^{-2N-2}.
\end{aligned}
$$

In sehr kompakter Schreibweise lauten die letzten vier Größen $\mathfrak{s}^{\epsilon}_{\tau} = \mathfrak{u}+q^{\epsilon\tau}r_{\tau}[\![2]\!]_q$. Ferner setzen wir

$$
\mathfrak{n}_{\tau,z} = z^{-\tau}\mathfrak{s}'_{\tau}-\mathfrak{u} \quad \text{und} \quad \nu_{\tau,z} = \mathfrak{n}^{-1}_{\tau,z}(q^{-2\tau}z^{\tau N}-1).
$$

Im generischen Fall erzeugen die Differentiale $\mathrm{d}u^i_j$ den Hopf-Bimodul $\varGamma_{\tau,z}$ als linken $\mathcal{A}$-Modul, siehe [92, Lemma 1.5 und Theorem 2.1]. Äquivalent dazu ist, dass der Raum der Maurer-Cartan-Formen $\langle \omega_{ij} := \omega^{\tau}(u^i_j) \,|\, i,\, j = 1,\dots,N\rangle$ die Dimension $N^2$ hat. Das assoziierte Rechtsideal $\mathcal{R}_{\tau,z}$ erfüllt dann die Gleichung

$$
\mathcal{R}_{\tau,z} \oplus \langle u^i_j \,|\, i,j = 1,\dots,N\rangle \oplus \mathbb{C}1 = \mathcal{A}.
$$

Benutzt man (2.46) und (2.31), erhält man die Umrechnungsformeln von $\omega^\tau_{ij}$ zu den Maurer-Cartan-Formen $\omega_{ij} = \omega^\tau(u^i_j)$. Für $\tau = +$ bzw. $\tau = -$ erhalten wir

$$\omega_{ij} = z^{-1}(\hat{R}^2)^{ik}_{jl}\,\omega^+_{kl} - \delta_{ij}\omega^+_0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_{ij} = zd_k^{-1}(\hat{R}^{-2})^{ik}_{jl}\,\omega^-_{kl} - \delta_{ij}\omega^-_0\,. \tag{B.1}$$

In beiden Fällen ist $\vartheta = \mathfrak{n}_{\tau,z}\,\omega^\tau_0$. Beachtet man (B.1) und (2.31), so erhält man die erste untenstehende Gleichung. Analog zu den Berechnungen in Lemma 3.10 ergibt sich die zweite Gleichung:

$$\vartheta \triangleleft a = \mathfrak{n}_{\tau,z}\omega(a) + \varepsilon(a)\vartheta, \tag{B.2}$$

$$(\vartheta\otimes\vartheta)\triangleleft b = \mathfrak{n}^2_{\tau,z}\mathcal{S}(b) + \mathfrak{n}_{\tau,z}\big(\omega(b)\otimes\vartheta + \vartheta\otimes\omega(b)\big) + \varepsilon(b)\vartheta\otimes\vartheta. \tag{B.3}$$

Aufgrund von (3.19), (B.2), $\omega(U) = \vartheta$ und $\varepsilon(U) = \mathfrak{u}$ erhält man für alle $b \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{S}(Ub) = \eta\triangleleft b + (2\mathfrak{n}_{\tau,z} + \mathfrak{u})\mathcal{S}(b) + \vartheta\otimes\omega(b) + \omega(b)\otimes\vartheta. \tag{B.4}$$

Für $\epsilon \in \{+,-\}$ definieren wir

$$(v_\epsilon)^i_j := \sum_{k,n,m} q^{-2k}(\hat{P}^\epsilon)^{ki}_{nm}u^n_k u^m_j \quad \text{und} \quad V_\epsilon := \sum_i q^{-2i}(v_\epsilon)^i_i.$$

Ferner benötigen wir die Größen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_+ &= \mathfrak{u}+1, & \mathfrak{t}_- &= \mathfrak{u} - q^{-2N},\\
\alpha_\epsilon &= [\![2]\!]^2_q/\mathfrak{s}_\epsilon, & \gamma_\epsilon &= q\,[\![2]\!]_q/(\mathfrak{u}\mathfrak{t}_\epsilon),\\
\lambda^+_{\tau,z} &= q^\tau z^{-\tau}\mathfrak{s}_+/[\![2]\!]_q, & \lambda^-_{\tau,z} &= q^{-\tau}z^{-\tau}\mathfrak{s}_-/[\![2]\!]_q,\\
\mu^+_{\tau,z} &= \mathfrak{t}_+(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^+_\tau - \mathfrak{u})/(q[\![2]\!]_q\mathfrak{n}_{\tau,z}), & \mu^-_{\tau,z} &= \mathfrak{t}_-(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau - \mathfrak{u})/(q[\![2]\!]_q\mathfrak{n}_{\tau,z}).
\end{aligned}$$

Die folgenden Identitäten rechnet man leicht nach:

$$q^{2\tau}\mathfrak{s}_+ + q^{-2\tau}\mathfrak{s}_- = \mathfrak{s}^+_\tau + \mathfrak{s}^-_\tau = 2\mathfrak{u} + r_\tau[\![2]\!]^2_q, \tag{B.5}$$

$$q^\tau\mathfrak{s}_+ + q^{-\tau}\mathfrak{s}_- = [\![2]\!]_q\mathfrak{s}'_\tau. \tag{B.6}$$

Wegen (B.6) gilt $\lambda_{\tau,z} := \lambda^+_{\tau,z} + \lambda^-_{\tau,z} = z^{-\tau}\mathfrak{s}'_\tau$.
Für $(\epsilon,\iota) \in \{+,-\}\times\{0,1\}$ definieren wir die Abbildungen $Q_{\epsilon,\iota} \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes 2}, V^{\otimes 4})$ durch

$$(Q_{\epsilon,\iota})^{abmn}_{rs} = \sum_{x,y,z}(\hat{P}^\epsilon)^{ab}_{xy}(P_\iota)^{mn}_{yz}(\hat{P}^\epsilon)^{xz}_{rs}.$$

Wegen $\hat{P}^\epsilon \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$ und $P_\iota \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^c\otimes\boldsymbol{u})$ erhält man unschwer, dass die Elemente $Q_{\epsilon,\iota}$ im Raum $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}^c\otimes\boldsymbol{u})$ liegen.

**Lemma B.1** *Es seien $\mathcal{A}$ eine der Hopfalgebren $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_q(N))$ bzw. $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_q(N))$, $\Gamma = \Gamma_{\tau,z}$ und $\omega_{ij} := \omega^\tau(u^i_j)$. Dann gilt für alle $a,b,r,s = 1,\dots,N$*
(i)

$$u^a_r u^b_s - \delta_{ar}\delta_{bs} \equiv \sum_{\epsilon,\iota,m,n} c_{\epsilon,\iota}(Q_{\epsilon,\iota})^{abmn}_{rs}\,\widetilde{u}^m_n \pmod{\mathcal{R}_{\tau,z}}, \tag{B.7}$$

*wobei* $c_{\epsilon,1} = \alpha_\epsilon \lambda^\epsilon_{\tau,z}$ *und* $c_{\epsilon,0} = \mathfrak{u}\gamma_\epsilon \mu^\epsilon_{\tau,z}$.
(ii)

$$\mathcal{S}(u^a_r u^b_s) = \sum_{\epsilon,\iota,\iota'} c_{\epsilon,\iota} c_{\epsilon,\iota'} (Q_{\epsilon,\iota})^{abmn}_{xy} (Q_{\epsilon,\iota'})^{xyvw}_{rs} \omega_{mn} \otimes \omega_{vw}.$$

(iii) *Es gilt* $\mathcal{S}(W_\epsilon) = A^\epsilon_{\tau,z}\eta + B^\epsilon_{\tau,z}\vartheta \otimes \vartheta$, *mit* $W_\epsilon = V_\epsilon - \mu^\epsilon_{\tau,z} U$ *und*

$$A^\epsilon_{\tau,z} = \alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon_{\tau,z})^2 - \mu^\epsilon_{\tau,z}, \quad B^\epsilon_{\tau,z} = \gamma_\epsilon(\mu^\epsilon_{\tau,z})^2 - \mathfrak{u}^{-1}\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon_{\tau,z})^2. \tag{B.8}$$

*Beweis*. (i) Im gesamten Beweis summieren wir über sich wiederholende Indizes. Wir benötigen die Formeln (2) und (3) der Arbeit [91, S. 318], das sind

$$(v_\epsilon)^i_j - \frac{1}{\mathfrak{u}}\delta_{ij} V_\epsilon \equiv \lambda^\epsilon_{\tau,z}\left(u^i_j - \frac{1}{\mathfrak{u}}\delta_{ij} U\right) \pmod{\mathcal{R}_{\tau,z}}, \tag{B.9}$$

$$\widetilde{W}_\epsilon = \widetilde{V}_\epsilon - \mu^\epsilon_{\tau,z}\widetilde{U} \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}_{\tau,z}}. \tag{B.10}$$

Setzt man diese Formeln in die Hauptformel des Beweises von [92, Lemma 4.4] ein, nämlich in

$$\begin{aligned} u^a_r u^b_s - \delta_{ar}\delta_{bs} \equiv\ & \mathfrak{s}_+^{-1}[\![2]\!]_q^2 (\hat{P}^+)^{ab}_{xy}\, \widetilde{v}_{+}{}^{y}_{z} (\hat{P}^+)^{xz}_{rs} + \mathfrak{s}_-^{-1}[\![2]\!]_q^2 (\hat{P}^-)^{ab}_{xy}\, \widetilde{v}_{-}{}^{y}_{z} (\hat{P}^-)^{xz}_{rs} \\ & -q[\![2]\!]_q \mathfrak{s}_+^{-1}\mathfrak{t}_+^{-1} (\hat{P}^+)^{ab}_{rs}\widetilde{V}_+ - q[\![2]\!]_q \mathfrak{s}_-^{-1}\mathfrak{t}_-^{-1}(\hat{P}^-)^{ab}_{rs}\widetilde{V}_- \pmod{\mathcal{R}_{\tau,z}}, \end{aligned}$$

und benutzt die Identität $\mathfrak{s}_\epsilon = q^{-1}[\![2]\!]_q\, \mathfrak{t}_\epsilon - \mathfrak{u}$, erhält man nach einer Reihe von Umformungen (B.7).
(ii) Nach Definition der Abbildung $\mathcal{S}$ und wegen $\omega^\tau(a) = \omega^\tau(b)$ für $a \equiv b \pmod{\mathcal{R}_{\tau,z}}$, nach Definition des assoziierten Rechtsideals, folgt aus (i)

$$\mathcal{S}(u^a_r u^b_s) = \omega(u^a_x u^b_y) \otimes \omega(u^x_r u^y_s) = \sum_{\epsilon,\epsilon'\iota,\iota'} c_{\epsilon,\iota} c_{\epsilon',\iota'} (Q_{\epsilon,\iota})^{abmn}_{xy} (Q_{\epsilon',\iota'})^{xyvw}_{rs} \omega_{mn} \otimes \omega_{vw}.$$

Wegen $\hat{P}^\epsilon \hat{P}^{\epsilon'} = \delta_{\epsilon,\epsilon'}\hat{P}^\epsilon$ erhalten wir daraus (ii).
(iii) Nach Definition von $V_\epsilon$, wegen $\hat{P}^\epsilon \hat{P}^{\epsilon'} = \delta_{\epsilon,\epsilon'}\hat{P}^\epsilon$ und $q^{-2x-2y}(\hat{P}^\epsilon)^{ij}_{xy} = q^{-2i-2j}(\hat{P}^\epsilon)^{ij}_{xy}$ (keine Summation) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(V_\epsilon) &= q^{-2i-2j}(\hat{P}^\epsilon)^{ij}_{xy} \sum_{\epsilon',\iota,\iota'} c_{\epsilon'\iota} c_{\epsilon'\iota'} (\hat{P}^{\epsilon'})^{xy}_{ab} (P_\iota)^{mn}_{bc} (\hat{P}^{\epsilon'})^{ac}_{ed} (P_{\iota'})^{vw}_{df} (\hat{P}^\epsilon)^{ef}_{ij} \omega_{mn} \otimes \omega_{vw} \\ &= q^{-2x-2y} \sum_{\iota,\iota'} c_{\epsilon\iota} c_{\epsilon\iota'} (\hat{P}^\epsilon)^{xy}_{ab} (P_\iota)^{mn}_{bc} (\hat{P}^\epsilon)^{ac}_{xd} (P_{\iota'})^{vw}_{dy} \omega_{mn} \otimes \omega_{vw}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die lineare Abbildung $T_\epsilon = (T^{bcdy}_\epsilon)$ mit $T^{bcdy}_\epsilon = q^{-2x-2y}(\hat{P}^\epsilon)^{xy}_{ab}(\hat{P}^\epsilon)^{ac}_{xd}$ (keine Summation über $y$) zum Morphismenraum $\mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}^c \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^c \otimes \boldsymbol{u})$ gehört. Da ein linearer Isomorphismus dieses Raumes mit $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{u}^c \otimes \boldsymbol{u})$ existiert, ist auch der erste Raum zweidimensional. Die beiden Morphismen $Q_0$ und $Q_1$ mit $Q^{bcdy}_\iota := q^{-2y}(P_\iota)^{bc}_{yd}$, $\iota = 0, 1$ (keine Summation über $y$) bilden eine Basis von $\mathrm{Mor}(\mathbf{1}, \boldsymbol{u}^c \otimes \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}^c \otimes \boldsymbol{u})$. Wegen (A.5) ist $T_\epsilon = \alpha_\epsilon^{-1} Q_1 + \mathfrak{u}^{-1}\gamma_\epsilon^{-1} Q_0$. Außerdem gilt

$$(P_\iota \otimes P_{\iota'})Q_{\iota''} = \delta_{\iota,\iota'}\delta_{\iota,\iota''}Q_\iota,$$

$$Q^{mnvw}_0 \omega_{mn} \otimes \omega_{vw} = \frac{1}{\mathfrak{u}}\vartheta \otimes \vartheta \quad \text{und} \quad Q^{mnvw}_1 \omega_{mn} \otimes \omega_{vw} = \eta - \frac{1}{\mathfrak{u}}\vartheta \otimes \vartheta.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(V_\epsilon) &= (\alpha_\epsilon^{-1} c_{\epsilon,1}^2 Q_1^{mnvw} + \mathfrak{u}^{-1}\gamma_\epsilon^{-1} c_{\epsilon,0}^2 Q_0^{mnvw})\, \omega_{mn} \otimes \omega_{vw} \\ &= \alpha_\epsilon(\lambda_{\tau,z}^\epsilon)^2 \eta + \big(\gamma_\epsilon(\mu_{\tau,z}^\epsilon)^2 - \mathfrak{u}^{-1}\alpha_\epsilon(\lambda_{\tau,z}^\epsilon)^2\big)\vartheta \otimes \vartheta. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Wegen $\mathcal{S}(U) = \eta$ ist der Beweis von (iii) komplett. ■

*Beweis von Lemma 3.38 (i).* Er ist in zwei Teile gegliedert. Der einfache Teil behandelt den Beweis für die Parameterwerte $z$ mit $z^{2N} \neq q^4$. Die Werte $z$ mit $z^N = q^2$ und $z^N = -q^2$ sind schwieriger zu handhaben. Man beachte, dass die Fälle $z^N = q^2$ keineswegs pathologischen Charakter tragen. Vielmehr sind genau diese Parameterwerte $\Gamma$-zulässig für $\mathrm{SL}_q(N)$. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, lassen wir bei den Parametern $A_{\tau,z}^\epsilon$, $B_{\tau,z}^\epsilon$, $\mathfrak{n}_{\tau,z}$, $\nu_{\tau,z}$, $\lambda_{\tau,z}^\epsilon$, $\mu_{\tau,z}^\epsilon$ und $\lambda_{\tau,z}$ den Index $\tau, z$ weg.
*Fall 1:* $z^{2N} \neq q^4$. Nach [91, Formel (3) S. 318] und [91, Theorem 2.1 (iii)] gilt

$$\widetilde{\mathcal{D}^{-1}} \equiv \nu\widetilde{U} \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathcal{D}} \equiv -z^{-\tau N} q^{2\tau}\nu\widetilde{U} \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{R}).$$

Da $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}^{-1}$ gruppenartig sind, erhält man wegen $\mathcal{S}(\widetilde{U}) = \eta$ und $\omega(\widetilde{U}) = \vartheta$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{D}^{-1}} - \nu\widetilde{U}) &= \nu^2\vartheta \otimes \vartheta - \nu\eta, \\ \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{D}} + z^{-\tau N}q^{2\tau}\nu\widetilde{U}) &= z^{-2\tau N}q^{4\tau}\nu^2\, \vartheta \otimes \vartheta + z^{-\tau N}q^{2\tau}\nu\, \eta. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Wegen $z^N \neq q^2$ ist $\nu \neq 0$. Folglich gilt nach Division der obigen beiden Gleichungen durch $\nu$ bzw. durch $z^{-\tau N}q^{2\tau}\nu$ und anschließendem Gleichsetzen $\eta = \nu\vartheta^2 = -z^{-\tau N}q^{2\tau}\nu\vartheta^2$ in ${}_{\mathfrak{u}}\Gamma^\wedge$. Folglich ist $\vartheta^2 = 0$ in ${}_{\mathfrak{u}}\Gamma^\wedge$, da $z^N \neq -q^2$.
*Fall 2:* $(z^N - q^2)(z^N + q^2) = 0$.
Wir setzen $x := \widetilde{U}U - \lambda\widetilde{U}$. Man beachte, dass wegen $\hat{P}^+ + \hat{P}^- = I$ gilt $x = \widetilde{W}_+ + \widetilde{W}_-$. Nach (B.9) und wegen $\mu^+ + \mu^- = \lambda + \mathfrak{u}$ gilt $x \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{R})$. Wegen Lemma B.1 (iii), ist $\mathcal{S}(x) = A\eta + B\vartheta \otimes \vartheta$, wobei $A = A^+ + A^-$ und $B = B^+ + B^-$. Setzt man $b = U$ in (B.3) ein und $b = \widetilde{U}$ in (B.4), so erhält man

$$(\vartheta \otimes \vartheta) \triangleleft U = \mathfrak{n}^2\eta + (2\mathfrak{n} + \mathfrak{u})\vartheta \otimes \vartheta, \quad \eta \triangleleft U = (A - \mathfrak{n} + \mathfrak{u})\eta + (B - 2)\vartheta \otimes \vartheta. \tag{B.13}$$

Setzt man in (3.17) $r = x$ und $a = U$ ein, so folgt aus (B.13)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(xU) &= A\eta \triangleleft U + B(\vartheta \otimes \vartheta) \triangleleft U \\ &= (A(A - \mathfrak{n} + \mathfrak{u}) + B\mathfrak{n}^2)\eta + (A(B - 2) + B(2\mathfrak{n} + \mathfrak{u}))\vartheta \otimes \vartheta \\ &=: A'\eta + B'\vartheta \otimes \vartheta. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Angenommen, die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$ sei regulär. Dann ist $\vartheta\otimes\vartheta$ eine Linearkombination von $\mathcal{S}(x)$ und $\mathcal{S}(xU)$, und somit gilt $\vartheta\otimes\vartheta \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, und wir sind fertig. Ist die Matrix singulär, gilt

$$(A - \mathfrak{n}B)(2A - \mathfrak{n}B) = 0.$$

Wendet man obige Argumentation anstelle auf $\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(xU)\}$ auf die Paare $\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(\widetilde{W_+}U)\}$, $\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(\widetilde{W_-}U)\}$, $\{\mathcal{S}(\widetilde{W_+}), \mathcal{S}(\widetilde{W_+}U)\}$ und $\{\mathcal{S}(\widetilde{W_-}), \mathcal{S}(\widetilde{W_-}U)\}$ an, so erhalten wir $\vartheta\otimes\vartheta \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ oder zwei weitere Möglichkeiten: $2A^+ = \mathfrak{n}B^+, 2A^- = \mathfrak{n}B^-$ oder $A^+ = \mathfrak{n}B^+, A^- = \mathfrak{n}B^-$.
*Fall 2.1:* $2A^\epsilon = \mathfrak{n}B^\epsilon$, $\epsilon \in \{+,-\}$. Es sei zunächst $N \geq 3$. Da $q$ transzendent ist, ist $\lambda^\epsilon$ von Null verschieden. Setzt man die Werte (B.8) für $A^\epsilon$ und $B^\epsilon$ ein und verwendet $\gamma_\epsilon\mu^\epsilon = \mathfrak{u}^{-1}\mathfrak{n}^{-1}(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^\epsilon_\tau - \mathfrak{u})$ und $\lambda = \mathfrak{u} + \mathfrak{n}$, so ergibt sich

$$2\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 - 2\mu^\epsilon = \mathfrak{n}\,\frac{z^{-2\tau}\mathfrak{s}^\epsilon_\tau - \mathfrak{u}}{\mathfrak{u}\mathfrak{n}}\,\mu^\epsilon - \frac{\lambda - \mathfrak{u}}{\mathfrak{u}}\,\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2,$$
$$(\lambda + \mathfrak{u})\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 = (z^{-2\tau}\mathfrak{s}^\epsilon_\tau + \mathfrak{u})\mu^\epsilon. \tag{B.15}$$

Angenommen, $\mu^\epsilon = 0$ für ein $\epsilon \in \{+,-\}$. Wegen (B.15) ist dann $\lambda + \mathfrak{u} = z^{-\tau}\mathfrak{s}'_\tau + \mathfrak{u} = 0$, da $\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 \neq 0$. Wegen der Definition von $\mu^\epsilon$ ist somit $z^{-2\tau}\mathfrak{s}^\epsilon_\tau - \mathfrak{u} = 0$. Eliminiert man $\mathfrak{u}$, so erhält man $z = -q^{2\epsilon}$ und $q$ ist eine Einheitswurzel. Dies widerspricht unserer Annahme. Folglich ist $\mu^+\mu^- \neq 0$. Setzt man $\lambda + \mathfrak{u} = \mu^+ + \mu^-$ in Gleichung (B.15) ein, erhält man

$$\mu^+(\alpha_+(\lambda^+)^2 - z^{-2\tau}\mathfrak{s}^+_\tau - \mathfrak{u}) = -\alpha_+(\lambda^+)^2\mu^-,$$
$$\mu^-(\alpha_-(\lambda^-)^2 - z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau - \mathfrak{u}) = -\alpha_-(\lambda^-)^2\mu^+.$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen, dividiert durch $\mu^+\mu^-$ und setzt dann die Gleichung $\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 = q^{2\epsilon\tau}z^{-2\tau}\mathfrak{s}_\epsilon$ ein, erhält man

$$\alpha_+(\lambda^+)^2(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau + \mathfrak{u}) + \alpha_-(\lambda^-)^2(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^+_\tau + \mathfrak{u}) = (z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau + \mathfrak{u})(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau + \mathfrak{u}),$$

bzw.

$$z^{-2\tau}\big(q^{2\tau}\mathfrak{s}_+(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^-_\tau + \mathfrak{u}) + q^{-2\tau}\mathfrak{s}_-(z^{-2\tau}\mathfrak{s}^+_\tau + \mathfrak{u})\big) = z^{-4\tau}\mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau - z^{-2\tau}\mathfrak{u}(\mathfrak{s}^+_\tau + \mathfrak{s}^-_\tau) + \mathfrak{u}^2.$$

Wegen (B.5) verschwindet der Koeffizient vor $z^{-2\tau}$. Setzt man $\mathfrak{s}^\epsilon_\tau = \mathfrak{u} + q^{\tau\epsilon}r_\tau[\![2]\!]_q$ ein, erhält man weiter

$$0 = z^{-4\tau}(q^{2\tau}\mathfrak{s}_+(\mathfrak{u} + q^{-\tau}r_\tau[\![2]\!]_q) + q^{-2\tau}\mathfrak{s}_-(\mathfrak{u} + q^{\tau}r_\tau[\![2]\!]_q) - (\mathfrak{u} + q^{-\tau}r_\tau[\![2]\!]_q)(\mathfrak{u} + q^{\tau}r_\tau[\![2]\!]_q)) - \mathfrak{u}^2,$$

bzw.

$$0 = z^{-4\tau}((q^{2\tau}\mathfrak{s}_+ + q^{-2\tau}\mathfrak{s}_-)\mathfrak{u} + (q^\tau\mathfrak{s}_+ + q^{-\tau}\mathfrak{s}_-)[\![2]\!]_q r_\tau - \mathfrak{u}^2 - \mathfrak{u}r_\tau[\![2]\!]_q^2 - r_\tau^2[\![2]\!]_q^2) - \mathfrak{u}^2.$$

Benutzt man (B.5), (B.6) und $\mathfrak{u} \neq 0$, hat man $z^{-4\tau}(\mathfrak{u} + [\![2]\!]_q^2 r_\tau) - \mathfrak{u} = 0$. Wegen $z^{2N} = q^4$, liefert dies im Falle $\tau = +$

$$(q^{2N+2} + q^{2N} + q^{2N-6} + q^{2N-8} + \cdots + 1)^N - q^8(q^{2N-2} + q^{2N-4} + \cdots + 1)^N = 0,$$

und im Falle $\tau = -$

$$(q^{2N+2} + q^{2N} + \cdots + q^8 + q^2 + 1)^N - q^{4N-8}(q^{2N-2} + q^{2N-4} + \cdots + 1)^N = 0.$$

Da $N \geq 3$ widerspricht dies unserer Annahme, dass $q$ transzendent ist. Somit ist der Fall $2A^\epsilon = \mathfrak{n}B^\epsilon$ für $N \geq 3$ unmöglich. Es sei nun $N = 2$, $\Gamma = \Gamma_{+,z}$, und $z^2 = -q^2$. Entsprechend $z = \pm \mathrm{i}q$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$) lauten die definierenden Parameter

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda^+ &= \pm\mathrm{i}(q^{-1} + q^{-5}), & \alpha_+\lambda &= \pm\mathrm{i}(q + q^{-1}), \\ \mu^+ &= -\mathfrak{n}^{-1}(1 + q^{-2} + q^{-4})(q^{-2} + q^{-6}), & \mathfrak{n} &= \pm\mathrm{i}q^{-1} - q^{-2} - q^{-4} \pm \mathrm{i}q^{-5}, \\ \gamma_+(\mu^+)^2 &= \mathfrak{n}^{-2}(q^4 + q^2 + 1)(q^{-2} + q^{-6})^2. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (B.8) ein, führen elementare Umformungen der Gleichung $2A^+ - \mathfrak{n}B^+ = 0$ in beiden Fällen auf $(q^2 + 1)^2(q^4 + 1) = 0$. Dies widerspricht unserer Annahme, dass $q$ transzendent ist.

*Fall 2.2:* $A^\epsilon = \mathfrak{n}B^\epsilon$, $\epsilon \in \{+, -\}$. Ähnlich zur Herleitung von (B.15) erhalten wir $\lambda\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 = z^{-2\tau}\mu^\epsilon\mathfrak{s}^\epsilon_\tau$. Setzt man $\alpha_\epsilon(\lambda^\epsilon)^2 = q^{2\epsilon\tau}z^{-2\tau}\mathfrak{s}_\epsilon$ ein und dividiert dann durch $z^{-2\tau}$, so erhält man $q^{2\epsilon\tau}\lambda\mathfrak{s}_\epsilon = \mu^\epsilon\mathfrak{s}^\epsilon_\tau$. Setzt man hier die Identität $q^{2\tau\epsilon}\mathfrak{s}_\epsilon = \tau\epsilon\hat{q}^{-1}[\![2]\!]_q r_\tau + \mathfrak{s}^\epsilon_\tau$ ein, subtrahiert $\lambda\mathfrak{s}^\epsilon_\tau$ und multipliziert dann mit $\mathfrak{s}^{-\epsilon}_\tau$, so erhält man für $\epsilon = +, -$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda\tau\hat{q}^{-1}[\![2]\!]_q r_\tau \mathfrak{s}^-_\tau &= \mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau(\mu^+ - \lambda), \\ -\lambda\tau\hat{q}^{-1}[\![2]\!]_q r_\tau \mathfrak{s}^+_\tau &= \mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau(\mu^- - \lambda). \end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen und beachtet $\mu^+ + \mu^- = \lambda + \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}^-_\tau - \mathfrak{s}^+_\tau = -\tau\hat{q}[\![2]\!]_q r_\tau$, erhalten wir $-\lambda[\![2]\!]_q^2 r_\tau^2 = (\mathfrak{u} - \lambda)\mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau$. Folglich ist $\lambda = \mathfrak{u}\mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau/(\mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau - [\![2]\!]_q^2 r_\tau^2)$. Beachtet man $\mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau - [\![2]\!]_q^2 r_\tau^2 = \mathfrak{u}(\mathfrak{u} + r_\tau[\![2]\!]_q^2)$, erhält man weiter $\lambda = \mathfrak{s}^+_\tau\mathfrak{s}^-_\tau/(\mathfrak{u} + r_\tau[\![2]\!]_q^2)$. Setzt man schließlich $\lambda = z^{-\tau}(\mathfrak{u} + r_\tau)$ ein, hat man

$$z^{-\tau}(\mathfrak{u} + r_\tau)(\mathfrak{u} + r_\tau[\![2]\!]_q^2) = (\mathfrak{u} + q^\tau[\![2]\!]_q r_\tau)(\mathfrak{u} + q^{-\tau}[\![2]\!]_q r_\tau).$$

Wegen $z^{2N} = q^4$ schließen wir hieraus, dass $q$ algebraisch ist. Dies widerspricht unserer Annahme. Der Fall $A^\epsilon = \mathfrak{n}B^\epsilon$ ist somit unmöglich. Fasst man die Resultate der Fälle 2.1 und 2.2 zusammen, dann ergibt sich $\vartheta^2 = 0$ in ${}_{\mathrm{u}}\Gamma^\wedge$, und der Beweis ist abgeschlossen.

Zu (ii). Nach [111, Formel (1.26)] liegt $x := \widetilde{U}U - \lambda\widetilde{U}$ in $\mathcal{R}$. Mit Hilfe der Maurer-Cartan-Formen $\vartheta$ und $\eta$ lässt sich dieses Element schreiben als $\xi = A\eta + B\vartheta \otimes \vartheta$, mit

$$A = q^{-6}(q - \nu)(q^5 - \nu) \quad \text{und} \quad B = 2\nu q^{-1}(q^5 - \nu)/(q^3 - \nu),$$

vergleiche etwa [96, S. 517, unten]. Man beachte, dass $2A = nB$, wobei $n = \mathfrak{n}_{+,z} = \nu q^{-1} - q^{-2} - q^{-4} + \nu q^{-5}$. Wir müssen nur noch nachweisen, dass $\xi$ ein Vielfaches von $\eta^+$ ist. Äquivalent dazu ist, dass $\xi$ keinen $\eta^-$-Anteil hat. Dazu benötigen wir die Umrechnung der Maurer-Cartan-Formen auf unsere Standardbasis $\omega^+_{ij}$. Nach (B.1) gilt

$$\begin{aligned} \eta = q^{-2i}\omega_{ij}\otimes\omega_{ji} &= q^{-2i}\big((z^{-1}(\hat{R}^2)^{ik}_{jl}\,\omega^+_{kl} - \delta_{ij}\omega^+_0\big) \otimes \big(z^{-1}(\hat{R}^2)^{jm}_{in}\,\omega^+_{mn} - \delta_{ji}\,\omega^+_0\big) \\ &= z^{-2}q^{-2i}(\hat{R}^2)^{ik}_{jl}(\hat{R}^2)^{jm}_{in}\,\omega^+_{kl}\otimes\omega^+_{mn} + (-2z^{-1}\mathfrak{s}'_+ + \mathfrak{u})\,\omega^+_0\otimes\omega^+_0 \\ &= z^{-2}\hat{q}^2\,q^{-2l}\,\omega^+_{kl}\otimes\omega^+_{lk} + \alpha\,\omega^+_0\otimes\omega^+_0, \end{aligned}$$

wobei $\alpha = z^{-2}(q^{-1}\hat{q}^3 + 2q^{-1}\hat{q} + \mathfrak{u}) - 2n - \mathfrak{u}$. Dabei benutzten wir die Heckebedingung (2.4), (A.5) und $\mathrm{tr}^1_q\,\hat{R} = q^{-1}I$, vergleiche Anhang A.1, und die Definition von $\mathfrak{n}_{+,z}$. Wegen (B.1) gilt ferner $\vartheta\otimes\vartheta = n^2\omega_0^+\otimes\omega_0^+$. Nach (3.67) und (3.66) gilt

$$\begin{aligned}\omega_0^+\otimes\omega_0^+ &= q\eta^+ - q^{-1}\eta^-,\\ q^{-2l}\,\omega_{kl}^+\otimes\omega_{lk}^+ &= q^{-1}(\eta^+ + \eta^-).\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die $\eta^-$-Komponente $\xi^-$ von $\xi$. Nach den obigen beiden Transformationsformeln ist

$$\begin{aligned}\xi^- = (A\eta + b\vartheta\otimes\vartheta)^- &= \left(z^{-2}\hat{q}^2 A q^{-2l}\,\omega_{kl}^+\otimes\omega_{lk}^+ + (\alpha a + n^2 B)\omega_0^+\otimes\omega_0^+\right)^-\\ &= (q^{-1}z^{-2}\hat{q}^2 A - q^{-1}(\alpha A + n^2 B))\eta^-.\end{aligned}$$

Setzt man nun $z^2 = q^2$ und $2A = nB$ ein, erkennt man, dass der obige Koeffizient verschwindet, also $\xi^- = 0$. ∎

## B.2 Beweis von Lemma 3.38 (iii)

Wir wollen, ähnlich zum Anhang B.1, nachweisen, dass die biinvarianten 2-Formen $\eta^+$ und $\eta^-$ in $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ liegen. Wir setzen dabei im Gegensatz zum vorangegangenen Anhang nur voraus, dass $q$ keine Einheitswurzel ist. Wir werden für die Kalküle $\Gamma_+ := \Gamma_{+,1}$ und $\Gamma_- := \Gamma_{-,1}$ verschiedene Beweise angeben, da $\Gamma_-$ etwas schwieriger zu handhaben ist. Der Beweis für $\Gamma_+$ ist einfach, da wir nur auf ein einziges $\mathrm{Ad}_\mathrm{R}$-invariantes Element aus $\mathcal{R}$ zurückgreifen müssen. Im zweiten Beweis benötigen wir zumindest zwei derartige Elemente, deren genaue Beschreibung wir aus [92, Abschnitt 6] nehmen. Außerdem verwenden wir ein Computeralgebra-Programm, um lange Termumformungen auszuführen. Für transzendente Werte von $q$ funktioniert der erste Beweis auch für $\Gamma_-$.

Abkürzend schreiben wir $\hat{r} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}^{-1}$. Im Folgenden wird *nicht* über die Indizes $\tau$ und $\nu$ summiert.

*Teil 1:* $\Gamma = \Gamma_+$. Zur Abkürzung setzen wir $\theta_{ij} := \omega_{ij}^+$ und $\theta := \omega_0^+$. Wir zeigen zunächst, dass $Q := \widetilde{U}^2 - \hat{q}\hat{r}\widetilde{U}$ in $\mathcal{R}$ liegt. Wegen (2.46) und (A.14) erhalten wir $\theta\triangleleft U = \mathrm{tr}_q^1(\hat{R}^2)^m_n\theta_{mn} = (\hat{q}\hat{r} + \mathfrak{s})\theta$. Wegen (2.31), (2.29), und $\varepsilon(U) = \mathfrak{s}$ erhalten wir

$$\omega(Q) = (\theta\triangleleft\widetilde{U})\triangleleft\widetilde{U} - \hat{q}\hat{r}\theta\triangleleft\widetilde{U} = 0.$$

Außerdem ist $\varepsilon(Q) = 0$ und somit $Q \in \mathcal{R}$. Als nächstes berechnen wir $\mathcal{S}(Q)$. Wegen $Q \in \mathcal{R}$ erhalten wir mit (3.20) $\mathcal{S}(Q) = (\theta\otimes\theta)\triangleleft Q$. Beachtet man (B.1) und (3.69), erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(Q) = (\theta\otimes\theta)\triangleleft Q &= (q\eta^+ - q^{-1}\eta^-)\triangleleft(\widetilde{U}\widetilde{U} - \hat{q}\hat{r}\widetilde{U})\\ &= q\alpha_+^2\eta^+ - q^{-1}\alpha_-^2\eta^- - \hat{q}\hat{r}(q\alpha_+\eta^+ - q^{-1}\alpha_-\eta^-)\\ &= q\alpha_+(\alpha_+ - \hat{q}\hat{r})\eta^+ - q^{-1}\alpha_-(\alpha_- - \hat{q}\hat{r})\eta^-.\end{aligned}\tag{B.16}$$

Da $\mathcal{R}$ ein Rechtsideal ist, liegt $Q\widetilde{U}$ ebenfalls in $\mathcal{R}$. Wegen (3.19) und (B.16) gilt also

$$\mathcal{S}(Q\widetilde{U}) = q\alpha_+^2(\alpha_+ - \hat{q}\hat{r})\eta^+ - q^{-1}\alpha_-^2(\alpha_- - \hat{q}\hat{r})\eta^-.\tag{B.17}$$

Zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems (B.16) und (B.17) in den Variablen $\eta^+$ und $\eta^-$ betrachten wir die Koeffizientendeterminante

$$\begin{aligned}\det &= \alpha_+\alpha_-(\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha_+ - \hat{q}\hat{r})(\alpha_- - \hat{q}\hat{r})\\ &= (\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^{-1})\hat{q}^6[\![2]\!]_q^3(q\mathfrak{r}-q^{-1}\mathfrak{r}^{-1})(q^{-1}\mathfrak{r}-q\mathfrak{r}^{-1})(q^2\mathfrak{r}-q^{-2}\mathfrak{r}^{-1})(q^{-2}\mathfrak{r}-q^2\mathfrak{r}^{-1}).\end{aligned}$$

Da $q$ keine Einheitswurzel ist, gilt $\det \neq 0$. Folglich liegen sowohl $\eta^+$ als auch $\eta^-$ in $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.
*Teil 2:* $\Gamma = \Gamma_-$. Wir bezeichnen den kritischen Wert mit $c$,

$$c = \hat{q}q^2\mathfrak{r}(2\mathfrak{s}+\hat{q}\hat{r}) = (q^4+1)\mathfrak{r}^2 + 2q(q^2-1)\mathfrak{r} - (q^4+1).$$

Es gibt zwei $\mathrm{Ad}_\mathrm{R}$-invariante quadratische Elemente in $\mathcal{A}$, nämlich $V_\nu = D^b_a D^j_i (\hat{P}^\nu)^{ai}_{yz}\, u^y_b u^z_j$, $\nu \in \{+,-\}$ mit $\varepsilon(V_\nu) = \mathfrak{s}t_\nu$.
Die den Kalkül $\Gamma_-$ definierenden Parameter $\mu^\nu$ sind bestimmt durch die Gleichung $\widetilde{W_\nu} \in \mathcal{R}$, wobei $W_\nu = V_\nu - \mu^\nu U$, vgl. [92, (3) S. 656]. Auf derselben Seite findet man auch deren numerische Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\mu^+ &= \frac{\hat{r}(-q^2\mathfrak{r}+q^{-2}\mathfrak{r}^{-1}-\hat{q})}{\hat{q}\hat{r}+2\mathfrak{s}},\\ \mu^- &= \frac{\hat{r}(-q^{-2}\mathfrak{r}+q^2\mathfrak{r}^{-1}-\hat{q})}{\hat{q}\hat{r}+2\mathfrak{s}}.\end{aligned}$$

Die Spektralprojektoren $\hat{P}^\nu$, $\nu\in\{+,-\}$, der $\hat{R}$-Matrix aus Abschnitt 2.1.4 sowie ihre $q$-Spuren kann man auch in der folgenden Gestalt aufschreiben

$$\hat{P}^\nu = (\lambda_\nu + \lambda_\nu^{-1})^{-1}(\lambda_\nu^{-1}I + \hat{R} + \hat{q}(1-\mathfrak{r}\lambda_\nu)^{-1}K), \tag{B.18}$$

$$\mathrm{tr}^1_q(\hat{P}^\nu) = \frac{\hat{r}(\lambda_\nu^2\mathfrak{r}-\lambda_\nu^{-1})}{\hat{q}(\lambda_\nu+\lambda_\nu^{-1})(\lambda_\nu\mathfrak{r}-1)} I =: t_\nu I. \tag{B.19}$$

Man rechnet leicht nach, dass die rechtsadjungierte Wirkung eines $\mathrm{Ad}_\mathrm{R}$-invarianten Elements den Raum der biinvarianten Elemente eines beliebigen Hopf-Bimoduls invariant lässt. Wendet man dies auf die Hopf-Bimoduln $\Lambda^\tau$ und die $\mathrm{Ad}_\mathrm{R}$-invarianten Elemente $V_\nu$ an und beachtet, dass $\eta^\tau$, $\tau\in\{+,-\}$, das einzige biinvariante Element von $\Lambda^\tau$ ist (bis auf Vielfachheit), dann müssen also komplexe Zahlen $c_{\tau\nu}$, $\tau$, $\nu \in \{+,-\}$, existieren mit

$$\eta^\tau \triangleleft \widetilde{V_\nu} = c_{\tau\nu}\eta^\tau.$$

Wir wollen diese Konstanten bestimmen. Nach Definition von $V_\nu$ und Gleichung (3.68) ist

$$\begin{aligned}\eta^\tau \triangleleft V_\nu &= \eta^\tau \triangleleft u^i_j u^s_t (\hat{P}^\nu)^{jt}_{ab} D^a_i D^b_s\\ &= \big(\delta_{ij}\eta^\tau + \hat{q}(\lambda_\tau^2+1)\xi^\tau_{ij} - \mathfrak{r}^{-1}\hat{q}(1+\lambda_\tau^{-2})\eta^\tau_{ij}\big) \triangleleft u^s_t(\hat{P}^\nu)^{jt}_{ab} D^a_i D^b_s.\end{aligned}$$

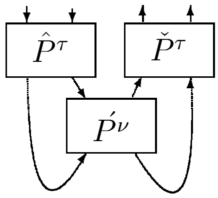
Wir demonstrieren die Berechnungen am ersten Term. Wegen (3.68) und (B.19) gilt

$$\delta_{ij}\eta^\tau \triangleleft (u^s_t(\hat{P}^\nu)^{jt}_{ab} D^a_i D^b_s) = t_\nu \eta^\tau \triangleleft U = t_\nu(\mathfrak{s}+\alpha_\tau)\eta^\tau.$$

Ähnlich den graphischen Berechnungen im Abschnitt 3.6.1 erhält man für die beiden anderen Terme

$$\begin{aligned}
\xi^\tau_{ij} \triangleleft (u^s_t (\hat{P}^\nu)^{jt}_{ab} D^a_i D^b_s) &= (\hat{q}\delta_{\tau,\nu}\mathfrak{r}^2\lambda_\tau^2 + \mathfrak{r}\lambda_\nu^2 t_\nu - \hat{q}\lambda_\nu\lambda_\tau^{-1} e_{\tau\nu})\eta^\tau,\\
\eta^\tau_{ij} \triangleleft (u^s_t (\hat{P}^\nu)^{jt}_{ab} D^a_i D^b_s) &= (\hat{q}\mathfrak{r}\lambda_\nu^{-1}\lambda_\tau e_{\tau\nu} + \lambda_\nu^{-2} t_\nu - \hat{q}\mathfrak{r}^{-1}\lambda_\tau^{-2}\delta_{\tau,\nu})\eta^\tau,
\end{aligned}$$

wobei man $e_{\tau\nu}$ aus dem folgenden Bild mit Hilfe von (B.18) bestimmt:




$$= e_{\tau\nu}\eta^\tau.$$

Abbildung B.1: Die Definition von $e_{\tau\nu}$.

Der numerische Wert ist $e_{\tau\nu} = (\lambda_\tau^{-1} + \hat{q}(1 - \mathfrak{r}\lambda_\nu)^{-1})/(\lambda_\nu + \lambda_\nu^{-1})$. Setzt man alle bekannten Parameter ein, hat man schließlich

$$\begin{aligned}
c_{++} &= c^{-1}(q^2+1)(q^2\mathfrak{r}^2-1)\mathfrak{r}^{-2}q^{-6}((q^{12}+q^4)\mathfrak{r}^4 + (2q^{11}-2q^9+2q^5-2)\mathfrak{r}^3 + \\
&\qquad + (-q^{12}+q^8-4q^6+q^4-1)\mathfrak{r}^2 + (-2q^9+2q^7-2q^3+2q)\mathfrak{r} + q^8+1),\\
c_{+-} &= c^{-1}[\![2]\!]_q(2(q-q^{-1}\mathfrak{r}^{-2})(\mathfrak{r}+q^3)(\mathfrak{r}-q)((q^2-1+q^{-2})\mathfrak{r}^2 + \hat{q}\mathfrak{r} - q^2+1-q^{-2}),\\
c_{-+} &= c^{-1}[\![2]\!]_q(2(q^{-1}-q\mathfrak{r}^{-2})(q\mathfrak{r}+1)(q^3\mathfrak{r}-1)((q^2-1+q^{-2})\mathfrak{r}^2 + \hat{q}\mathfrak{r} - q^2+1-q^{-2}),\\
c_{--} &= c^{-1}(q^2+1)(\mathfrak{r}^2-q^2)\mathfrak{r}^{-2}q^{-6}((q^8+1)\mathfrak{r}^4 + (2q^9-2q^7+2q^3-2q)\mathfrak{r}^3 + \\
&\qquad + (-q^{12}+q^8-4q^6+q^4-1)\mathfrak{r}^2 + (-2q^{11}+2q^9-2q^5+2q^3)\mathfrak{r} + q^{12}+q^4).
\end{aligned}$$

Nun können wir vier biinvariante Elemente von $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ bestimmen. Wegen (B.1) und (3.69) erhalten wir

$$\mathcal{S}(W_\nu) = (\theta\otimes\theta)\triangleleft(\widetilde{V_\nu} - \mu^\nu\widetilde{U}) = q(c_{+\nu} - \mu^\nu\alpha_+)\eta^+ - q^{-1}(c_{-\nu} - \mu^\nu\alpha_-)\eta^-. \tag{B.20}$$

Ähnlich zum Teil 1 erhalten wir darüber hinaus

$$\mathcal{S}(W_\nu\widetilde{U}) = q\alpha_+(c_{+\nu} - \mu^\nu\alpha_+)\eta^+ - q^{-1}\alpha_-(c_{-\nu} - \mu^\nu\alpha_-)\eta^-. \tag{B.21}$$

Wir betrachten die $4\times 2$-Koeffizientenmatrix $T = (T_{ij})$ des linearen Gleichungssystems (B.20) und (B.21), $\nu \in \{+,-\}$, mit den Variablen $\eta^+$ und $\eta^-$. Ihre beiden Spalten lauten

$$\begin{aligned}
(T_{i1}) &= q\big(c_{++} - \mu^+\alpha_+,\ c_{+-} - \mu^-\alpha_+,\ \alpha_+(c_{++} - \mu^+\alpha_+),\ \alpha_+(c_{+-} - \mu^-\alpha_+)\big)^{\mathfrak{t}},\\
(T_{i2}) &= -q^{-1}\big(c_{-+} - \mu^+\alpha_-,\ c_{--} - \mu^-\alpha_-,\ \alpha_-(c_{-+} - \mu^+\alpha_-),\ \alpha_-(c_{--} - \mu^-\alpha_-)\big)^{\mathfrak{t}}.
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle: 1. $(T_{i1}) = 0$, 2. $(T_{i2}) = 0$ und 3. keine Spalte verschwindet identisch.

*Fall 1:* $c_{++} - \mu^+\alpha_+ = c_{+-} - \mu^-\alpha_+ = 0$. Dies entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= (q^2+1)(q\mathfrak{r}-1)(q\mathfrak{r}+1)(q^{12}\mathfrak{r}^4 + q^4\mathfrak{r}^4 + 2q^{11}\mathfrak{r}^3 - 2q^9\mathfrak{r}^3 + 2q^5\mathfrak{r}^3 - 2q^3\mathfrak{r}^3 - \\
&\quad - q^{12}\mathfrak{r}^2 + q^8\mathfrak{r}^2 - 4q^6\mathfrak{r}^2 + q^4\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^2 - 2q^9\mathfrak{r} + 2q^7\mathfrak{r} - 2q^3\mathfrak{r} + 2q\mathfrak{r} + q^8 + 1),\\
0 &= 2(q\mathfrak{r}-1)(q\mathfrak{r}+1)(\mathfrak{r}+q^3)(\mathfrak{r}-q)\times\\
&\qquad \times (q^4\mathfrak{r}^2 - q^2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 + q^3\mathfrak{r} - q\mathfrak{r} - q^4 + q^2 - 1)(q^2+1).
\end{aligned}$$

Da $q$ keine Einheitswurzel ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
d_1 &= q^{12}\mathfrak{r}^4 + q^4\mathfrak{r}^4 + 2q^{11}\mathfrak{r}^3 - 2q^9\mathfrak{r}^3 + 2q^5\mathfrak{r}^3 - 2q^3\mathfrak{r}^3 - \\
&\quad - q^{12}\mathfrak{r}^2 + q^8\mathfrak{r}^2 - 4q^6\mathfrak{r}^2 + q^4\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^2 - 2q^9\mathfrak{r} + 2q^7\mathfrak{r} - 2q^3\mathfrak{r} + 2q\mathfrak{r} + q^8 + 1 = 0,\\
d_2 &= q^4\mathfrak{r}^2 - q^2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 + q^3\mathfrak{r} - q\mathfrak{r} - q^4 + q^2 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus eliminieren wir schrittweise die Potenzen von $\mathfrak{r}$ und erhalten schließlich zwei Polynome in den Variablen $q$ und $\mathfrak{r}$:

$$\begin{aligned}
a =&(q^4+1)(q^6-q^2+1)(q^8+1)q^4\mathfrak{r}^3 + \\
&+ (q^4-q^2+1)(3q^{14} - 2q^{10} + 2q^8 - q^6 + 2q^2 - 2)q^3\mathfrak{r}^2 + \\
&+ (q^{20} - 2q^{18} + 2q^{14} - 4q^{12} - q^{10} + 5q^8 - 6q^6 + q^4 + q^2 - 1)\mathfrak{r} + \\
&+ (q^4-q^2+1)(q^{16} - 4q^{14} + 2q^{12} + 2q^{10} - 5q^8 + 2q^6 + 2q^4 - 4q^2 + 2)q
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b &= (-q^4-1)(q^6-q^2+1)(q^4-q^2+1)^4(q-1)^6(q+1)^6 q\mathfrak{r} + \\
&\quad + (-2q^{12} + 3q^{10} - 3q^8 + q^6 + q^4 - 2q^2 + 1)(q^4-q^2+1)^3(q-1)^6(q+1)^6 q^2,
\end{aligned}$$

so dass $ad_2 + bd_1 = -(q^6+q^3+1)(q^6-q^3+1)(q-1)^6(q+1)^6 q$. Man beachte, dass auf der rechten Seite kein $\mathfrak{r}$ mehr auftritt. Da aber $d_1 = d_2 = 0$, muss auch die rechte Seite der obigen Gleichung gleich $0$ sein, und somit ist $q$ eine Einheitswurzel, was unserer Annahme widerspricht. Folglich tritt der Fall 1 nicht ein.

*Fall 2:* $c_{-+} - \mu^+\alpha_- = c_{--} - \mu^-\alpha_- = 0$. Analog zum Fall 1 erhalten wir aus den obigen beiden Gleichungen, dass

$$\begin{aligned}
d_3 &= q^4\mathfrak{r}^2 - q^2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}^2 + q^3\mathfrak{r} - q\mathfrak{r} - q^4 + q^2 - 1 = 0,\\
d_4 &= q^8\mathfrak{r}^4 + \mathfrak{r}^4 + 2q^9\mathfrak{r}^3 - 2q^7\mathfrak{r}^3 + 2q^3\mathfrak{r}^3 - 2q\mathfrak{r}^3 - \\
&\quad - q^{12}\mathfrak{r}^2 + q^8\mathfrak{r}^2 - 4q^6\mathfrak{r}^2 + q^4\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}^2 - 2q^{11}\mathfrak{r} + 2q^9\mathfrak{r} - 2q^5\mathfrak{r} + 2q^3\mathfrak{r} + q^{12} + q^4 = 0.
\end{aligned}$$

Wiederum existieren Polynome $a$ und $b$ in den Variablen $q$ und $\mathfrak{r}$, so dass $ad_3 + bd_4 = (q^6+q^3+1)(q^6-q^3+1)(q^4-q^2+1)(q-1)^{12}(q+1)^{12}q^2$. Dies widerspricht unserer Annahme, dass $q$ keine Einheitswurzel ist. Somit verbleibt als einzige Möglichkeit der Fall 3.

*Fall 3.* Wir werden zeigen, dass $T$ den Rang 2 hat. Angenommen, $T$ habe höchstens den Rang 1. Dann müssen insbesondere die $2\times 2$-Matrizen, gebildet aus der ersten und dritten Zeile bzw. aus der zweiten und vierten Zeile die Determinante 0 haben. Wegen $\alpha_+ - \alpha_- \neq 0$ ist dies äquivalent zu den Gleichungen $(c_{++} - \mu^+\alpha_+)(c_{-+} - \mu^+\alpha_-) = 0$ und $(c_{+-} - \mu^-\alpha_+)(c_{--} - \mu^-\alpha_-) = 0$.

Da außerdem die Matrix aus den ersten beiden Zeilen eine verschwindende Determinante hat, erhalten wir $c_{++} - \mu^+\alpha_+ = c_{+-} - \mu^-\alpha_+ = 0$ oder $c_{-+} - \mu^+\alpha_- = c_{--} - \mu^-\alpha_- = 0$. Doch das ist nach der Fallannahme ausgeschlossen. Folglich hat $T$ den Rang $2$, und sowohl $\eta^+$ als auch $\eta^-$ liegen in $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.

# Index

# Symbole

# Abbildungsverzeichnis

# Literaturverzeichnis


[1] Abe, E.: *Hopf algebras*, Nummer 74 in Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1980

[2] Andruskiewitsch, N. und S. Natale: Plancherel identity for semisimple Hopf algebras, *Comm. Algebra* **25** (1997), 3239–3254

[3] Andruskiewitsch, N. und H.-J. Schneider: Hopf algebras of order $p^2$ and braided Hopf algebras of order $p$, *J. Algebra* **199** (1998), 430–454

[4] Andruskiewitsch, N. und H.-J. Schneider: Finite quantum groups and Cartan matrices, *Adv. Math.* **154** (2000), 1–45

[5] Apel, J. und U. Klaus: FELIX – an assistant for algebraists, in *ISSAC'91*, herausgegeben von S. Watt, ACM Press, New York, 1991

[6] Apel, J. und K. Schmüdgen: Classification of three-dimensional covariant differential calculi on Podleś' quantum spheres and on related spaces, *Lett. Math. Phys.* **32** (1994), 25–36

[7] Aschieri, P. und L. Castellani: An introduction to noncommutative differential geometry on quantum groups, *Int. J. Mod. Phys. A* **8** (1993), 1667–1706

[8] Bautista, R., A. Criscuolo, M. Durdević, M. Rosenbaum und J. Vergara: Quantum Clifford algebras from spinor representations, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 5747–5775

[9] Bernard, D.: Quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* **102** (1990), 49–66

[10] Bespalov, Y. und B. Drabant: Bicovariant differential calculi and cross products on braided Hopf algebras, *Quantum groups and quantum spaces, Banach Cent. Publ.* **40** (1997), 79–90

[11] Birman, J. und H. Wenzl: Braids, link polynomials and a new algebra, *Trans. Am. Math. Soc.* **313** (1989), 249–273

[12] Boerner, H.: *Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band LXXIV, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955

[13] Bourbaki, N.: *Groupes et algebrès de Lie. Chapitres IV, V et VI*, Éléments de mathématique, Hermann, Paris, 1968

[14] Bresser, K., A. Dimakis, F. Müller-Hoissen und A. Sitarz: Noncommutative Geometry of Finite Groups, *J. Phys. A* **29** (1996), 2705–2735

[15] Brzeziński, T.: Remarks on bicovariant differential calculi and exterior Hopf algebras, *Lett. Math. Phys.* **27** (1993), 287–300

[16] Brzeziński, T. und S. Majid: A class of bicovariant differential calculi on Hopf algebras, *Lett. Math. Phys.* **26** (1992), 67–78

[17] Carow-Watamura, U., M. Schlieker, S. Watamura und W. Weich: Bicovariant differential calculus on quantum groups $SU_q(N)$ and $SO_q(N)$, *Commun. Math. Phys.* **142** (1991), 605–641

[18] Chari, V. und A. Pressley: *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

[19] Concini, C. D., V. Kac und C. Procesi: Quantum coadjoint action, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 151–189

[20] Connes, A.: *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1995

[21] Curtis, C. W. und I. Reiner: *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, 1981

[22] Daele, A. V.: Dual pairs of Hopf $*$-algebras, *Bull. London Math. Soc.* **25** (1993), 209–230

[23] Daele, A. V.: The Haar measure on a compact quantum group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3125–3128

[24] Dijkhuizen, M. S. und T. H. Koornwinder: Quantum homogeneous spaces, duality and quantum $2$-spheres, *Geom. Dedicata* **52** (1994), 291–315

[25] Dijkhuizen, M. S. und M. Noumi: A family of quantum projective spaces and related $q$-hypergeometric orthogonal polynomials, *Trans. Am. Math. Soc.* **350** (1998), 3269–3296

[26] Dimakis, A. und F. Müller-Hoissen: Noncommutative geometry and integrable models, *Lett. Math. Phys.* **39** (1997), 69–79

[27] Doi, Y.: Braided bialgebras and quadratic bialgebras, *J. Phys. A* **21** (1993), 1731–1749

[28] Drinfeld, V.: Quantum groups, in *Proceedings ICM 1986*, Amer. Math. Soc., 1987

[29] Drinfeld, V.: Almost cocommutative Hopf algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 321–342

[30] Dubois-Violette, M., J. Madore und R. Kerner: Noncommutative differential geometry and new models of gauge theory, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 323–330

[31] Dubois-Violette, M., J. Madore und R. Kerner: Noncommutative differential geometry of matrix algebras, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 316–322

[32] Etingof, P. und O. Schiffmann: *Lectures on quantum groups*, Lectures in Mathematical Physics, International Press, Boston, 1998

[33] Goldschmidt, D. M.: *Group characters, symmetric functions, and the Hecke algebra*, University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, 1993

[34] Greub, W., S. Halperin und R. Vanstone: *Connections, curvature, and cohomology. Vol. II: Lie groups, principal bundles, and characteristic classes*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, London, 1973

[35] Greub, W., S. Halperin und R. Vanstone: *Connections, curvature, and cohomology. Volume III: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, London, 1976

[36] Grießl, M.: Bicovariant De Rham cohomology of $SU_q(2)$, *J. Geom. Phys.* **17** (1995), 90–94

[37] Gyoja, A.: A $q$-analogue of Young symmetrizer, *Osaka J. Math.* **23** (1986), 841–852

[38] Halverson, T., R. Leduc und A. Ram: Iwahori-Hecke algebras of type $A$, bitraces and symmetric functions, *Int. Math. Res. Not.* **9** (1997), 401–416

[39] Hayashi, T.: Quantum deformation of classical groups, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **28** (1992), 57–81

[40] Hayashi, T.: Quantum groups and quantum determinants, *J. Algebra* **152** (1992), 146–165

[41] Heckenberger, I.: Hodge and Laplace-Beltrami operators for bicovariant differential calculi on quantum groups, *Compositio Math.* **123** (2000), 329–354, preprint math.QA/9902130

[42] Heckenberger, I.: Classification of left-covariant differential calculi on the quantum group $\mathrm{SL}_q(2)$, *J. Algebra* **237** (2001), 203–237, preprint math.QA/0006211

[43] Heckenberger, I. und K. Schmüdgen: Levi-Civita connections on the quantum groups $SL_q(N)$, $O_q(N)$ and $Sp_q(N)$, *Commun. Math. Phys.* **185** (1997), 177–196

[44] Heckenberger, I. und K. Schmüdgen: Classification of bicovariant differential calculi on the quantum groups $SL_q(n+1)$ and $Sp_q(2n)$, *J. Reine Angew. Math.* **502** (1998), 141–162

[45] Heckenberger, I. und A. Schüler: Higher order differential calculus on $\mathrm{SL}_q(N)$, *Czech. J. Phys.* **47** (1997), 1153–1161

[46] Heckenberger, I. und A. Schüler: Exterior algebras related to the quantum group $\mathcal{O}(\mathrm{O}_q(3))$, *Czech. J. Phys.* **48** (1998), 1355–1362

[47] Heckenberger, I. und A. Schüler: Symmetrizer and antisymmetrizer of the Birman-Wenzl-Murakami algebra, *Lett. Math. Phys.* **50** (1999), 45–51

[48] Heckenberger, I. und A. Schüler: De Rham cohomology and Hodge decomposition for quantum groups, *erscheint in Proc. London Math. Soc.* (2001), preprint NTZ Universität Leipzig 10/2000, math.QA/0008195

[49] Hermisson, U.: Construction of covariant differential calculi on quantum homogeneous spaces, *Lett. Math. Phys.* **46** (1998), 313–322

[50] Humphreys, J. E.: *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Nummer 9 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972

[51] Humphreys, J. E.: *Reflection groups and Coxeter groups*, Nummer 29 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[52] Jantzen, J.-C.: *Lectures on quantum groups*, Nummer 6 in Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1996

[53] Jimbo, M.: A $q$-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang–Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69

[54] Jimbo, M.: A $q$-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang–Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247–252

[55] Jimbo, M.: Quantum R matrix for the generalized Toda system, *Commun. Math. Phys.* **102** (1986), 537–547

[56] Joseph, A.: *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[57] Jurčo, B.: Differential calculus on quantized simple Lie groups, *Lett. Math. Phys.* **22** (1991), 177–186

[58] Kakehi, T., T. Masuda und K. Ueno: Spectral analysis of a $q$-difference operator which arises from the quantum $\mathrm{SU}(1,1)$ group, *J. Oper. Theory* **33** (1995), 159–196

[59] Kassel, C.: *Quantum groups*, Nummer 155 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995

[60] Kauffman, L. H.: *On knots*, Nummer 151 in Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 1987

[61] Kauffman, L. H.: From knots to quantum groups (and back), in *Hamiltonian systems, transformation groups and spectral transform methods (Montreal, 1989)*, Univ. Montreal, Montreal, 1990

[62] Klimyk, A. und K. Schmüdgen: *Quantum Groups and Their Representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997

[63] Larson, R. G. und J. Towber: Two dual classes of bialgebras related to the concepts of "quantum group" and "quantum Lie algebra", *Comm. Algebra* **19** (1991), 3295–3345

[64] Leduc, R. und A. Ram: A ribbon Hopf algebra approach to the irreducible representations of centralizer algebras: The Brauer, Birman–Wenzl, and type A Iwahori–Hecke algebras, *Adv. Math.* **125** (1997), 1–94

[65] Lusztig, G.: *Introduction to quantum groups*, Nummer 110 in Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1993

[66] Lyubashenko, V. und A. Sudbery: Quantum supergroups of $\mathrm{GL}(n|m)$ type: differential forms, Koszul complexes, and Berezinians, *Duke Math. J.* **90** (1997), 1–62

[67] Macdonald, I. G.: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Claredon-Press, Oxford, 1995

[68] Madore, J.: *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, Band 257 von *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[69] Majid, S.: *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, 1995

[70] Majid, S.: Classification of bicovariant differential calculi, *J. Geom. Phys.* **25** (1998), 119–140

[71] Maltsiniotis, G.: Calcul différentiel sur le groupe linéaire quantique, *Preprint ENS, Paris* (1990)

[72] Maltsiniotis, G.: Groupes quantiques et structures différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), 831–834

[73] Maltsiniotis, G.: Formes différentielles invariantes à gauche sur le groupe quantique $\mathrm{GL}_{p,q}(2)$, *Internat. J. Modern Phys. B* **7** (1992), 3597–3615

[74] Maltsiniotis, G.: Calcul différentiel non commutatif sur le groupe quantique des matrices triangulaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **316** (1993), 1225–1228

[75] Manin, Y.: *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques (CRM), Montréal, 1988

[76] Manin, Y.: Notes on quantum groups and de Rham complexes, *Theor. Math. Phys.* **92** (1992), 997–1019

[77] Meyer, U.: Wave equations on $q$-Minkowski space, *Commun. Math. Phys.* **174** (1996), 457–475

[78] Parshall, B. und J. P. Wang: Quantum linear groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **89** (1991), 1–157

[79] Pflaum, M. und P. Schauenburg: Differential calculi on noncommutative bundles, *Z. Phys. C* **6** (1997), 733–744

[80] Pittner, L.: *Algebraic foundations of non-commutative differential geometry and quantum groups*, Nummer 39 in Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs, Springer-Verlag, Berlin, 1996

[81] Podleś, P.: Differential calculus on quantum spheres, *Lett. Math. Phys.* **18** (1989), 107–119

[82] Priddy, S. B.: Koszul resolutions, *Trans. Am. Math. Soc.* **152** (1970), 39–60

[83] Ram, A.: A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras, *Invent. Math.* **106** (1991), 461–488

[84] Reshetikhin, N., L. Takhtadzhyan und L. Faddeev: Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 193–225

[85] Ringel, C. M.: Hall algebras and quantum groups, *Invent. Math.* **101** (1990), 583–591

[86] Schauenburg, P.: Hopf modules and Yetter-Drinfel'd modules, *J. Algebra* **169** (1994), 874–890

[87] Schmitt, P. und F. Baumann: Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups, *Commun. Math. Phys.* **194** (1998), 71–86

[88] Schmüdgen, K.: Commutator representations of differential calculi on the quantum group $SU_q(2)$, *J. Geom. Phys.* **31** (1999), 241–264

[89] Schmüdgen, K.: On the construction of covariant differential calculi on quantum homogeneous spaces, *J. Geom. Phys.* **30** (1999), 23–47

[90] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Covariant differential calculi on quantum spaces and on quantum groups, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **11** (1993), 1155–1160

[91] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups, *Commun. Math. Phys.* **170** (1995), 315–335

[92] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups of type A, B, C and D, *Commun. Math. Phys.* **167** (1995), 635–670

[93] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Left-covariant differential calculi on $\mathrm{SL}_q(2)$ and $\mathrm{SL}_q(3)$, *J. Geom. Phys.* **20** (1996), 87–105

[94] Schmüdgen, K. und A. Schüler: Left-covariant differential calculi on $\mathrm{SL}_q(N)$, *Banach Center Publ.* **40** (1997), 185–191

[95] Schüler, A.: *Klassifikation von bikovarianten Differentialkalkülen auf Quantengruppen*, Dissertation, Universität Leipzig (1994)

[96] Schüler, A.: Differential Hopf algebras on quantum groups of type A, *J. Algebra* **214** (1999), 479–518, math.QA/9805139

[97] Schüler, A.: Two exterior algebras for orthogonal and symplectic quantum groups, *Compositio Math.* **126** (2001), 57–77, preprint math.QA/9906044

[98] Shnider, S. und S. Sternberg: *Quantum groups. From coalgebras to Drinfel'd algebras. A guided tour*, Graduate Texts in Mathematical Physics, II, International Press, Cambridge, 1993

[99] Sudbery, A.: Canonical differential calculus on quantum general linear groups and supergroups, *Phys. Lett. B* **284** (1992), 61–65

[100] Sudbery, A.: The algebra of differential forms on a full matric bialgebra, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **114** (1993), 111–130

[101] Sweedler, M. E.: *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1969

[102] Tsygan, B.: Notes on differential forms on quantum groups, *Sel. Math.* **12** (1993), 75–103

[103] Turaev, V.: Operator invariants of tangles, and $R$-matrices, *Math. USSR, Izv.* **35** (1990), 411–444

[104] Turaev, V.: *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, Nummer 18 in Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994

[105] Wenzl, H.: Hecke algebras of type $A_n$ and subfactors, *Invent. Math.* **92** (1988), 349–383

[106] Wenzl, H.: Quantum groups and subfactors of type $B$, $C$, and $D$, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990), 383–432

[107] Wenzl, H.: Representations of braid groups and the quantum Yang-Baxter equation, *Pacific J. Math.* **145** (1990), 153–180

[108] Wess, J. und B. Zumino: Covariant differential calculus on the quantum hyperplane, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **18** (1991), 302–312

[109] Woronowicz, S. L.: Compact matrix pseudogroups, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987), 613–665

[110] Woronowicz, S. L.: Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **23** (1987), 117–181

[111] Woronowicz, S. L.: Differential calculus on quantum matrix pseudogroups (quantum groups), *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), 125–170

[112] Woronowicz, S. L.: From multiplicative unitaries to quantum groups, *Int. J. Math.* **7** (1996), 127–149

[113] Yetter, D. N.: Quantum groups and representations of monoidal categories, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **108** (1990), 261–290