



## Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

**Projekt: Numerische Berechnung des Logarithmus** (empfohlene Gruppengröße: 2)

Approximieren Sie numerisch  $\log(x^*)$  für  $x^* = 2, 3, \dots, 10$ , indem Sie die folgenden Algorithmen anwenden

- Potenzreihen-Ansatz: Berechnen Sie für  $N \in \mathbb{N}$  (numerisch) die Summen

$$\sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{(x^* - 1)^k}{k} \quad \text{und} \quad - \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{\left(-\frac{x^*-1}{x^*}\right)^k}{k}.$$

- Quadratur zur Berechnung der Stammfunktion von  $1/x$ : Implementieren Sie eine zusammengesetzte (summierte) Quadraturformel (siehe auch [Her11, Abschnitt 8.2.2]) Ihrer Wahl aus der Vorlesung, um

$$\int_1^{x^*} \frac{1}{t} dt$$

zu approximieren.

- Logarithmus als Grenzwert: Benutzen Sie

$$\log(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x^*} - 1),$$

um durch

$$N(\sqrt[N]{x^*} - 1)$$

eine Näherung für  $\log(x^*)$  zu berechnen. Hierfür sollen Sie *keine* python-Funktion für die Berechnung von  $\sqrt[N]{x^*}$  benutzen, sondern das Newton-Verfahren implementieren, um  $\sqrt[N]{x^*}$  als Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^N - x^*$$

zu approximieren.

1. Implementieren Sie die drei Verfahren.
2. Testen Sie beim dritten Verfahren, wie viele Schritte beim Newton-Verfahren (abhängig von  $N$ ) ausgeführt werden müssen, damit der Fehler von

$$N(y_K - 1) \quad \text{und} \quad N(y_{K+1} - 1)$$

(wobei  $y_K$  die Ausgabe des Newton-Verfahrens für  $K$  Schritte bezeichne), sich nicht wesentlich unterscheiden.

- Erstellen Sie ein Diagramm, in dem Sie die Fehler  $|\log(x^*) - x_k|$  gegen die Anzahl der Schritte (Anzahl der Summanden beim Potenzreihen-Ansatz) auftragen. Benutzen Sie für die summierte Quadraturformel  $2^k$  Teilintervalle und tragen Sie den Fehler gegen  $k$  auf. Tragen Sie beim dritten Verfahren die Fehler gegen die Anzahl der Schritte des Newton-Verfahrens, die Sie für das jeweilige  $N$  bestimmt haben, auf.

Tragen Sie in dem Diagramm die y-Werte (d.h. den Fehler) logarithmisch auf (z.B. `semilogy` in matlab oder python). Vergleichen Sie die drei Verfahren und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

## Literatur

- [Her11] Martin Hermann. *Numerische Mathematik*. München: Oldenbourg Verlag, 3rd revised and expanded ed. edition, 2011.
- [Her20] Martin Hermann. *Numerische Mathematik. Band 1: Algebraische Probleme*. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter, 4th revised and enlarged edition, 2020.