



Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

Projekt: Vergleich von numerischen Verfahren zur Lösung nicht-linearer Gleichungen (empfohlene Gruppengröße: 2)

Für ein gegebenes $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ soll ein $x^* \in [0, 1]$ gefunden werden mit $f(x^*) = 0$. In diesem Projekt sollen vier verschiedene numerische Verfahren zur Lösung dieses Problems betrachtet werden, siehe auch [Her20, Abschnitte 4.3, 4.5, 4.2].

- Das Newton-Verfahren ist für einen Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegeben durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots$$

- Das Sekantenverfahren ist für zwei Startwerte $x_0, x_1 \in [0, 1]$ gegeben durch

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \text{für alle } k = 1, 2, 3, \dots$$

- Das Bisektionsverfahren ist für ein Startintervall $[a_0, b_0] \subseteq [0, 1]$ mit $f(a_0)f(b_0) < 0$ gegeben durch

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad a_{k+1} = \begin{cases} a_k & \text{wenn } f(x_k)f(a_k) < 0, \\ x_k & \text{sonst,} \end{cases} \quad b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{wenn } f(x_k)f(b_k) \leq 0, \\ x_k & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k = 0, 1, 2, \dots$

- Das Fixpunktverfahren sucht eine Lösung der Fixpunktgleichung $x = g(x)$ und ist für einen Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegeben durch

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots$$

1. Implementieren Sie die vier angegebenen Verfahren. Beim Newton-Verfahren soll die Ableitung von f ein Input-Parameter sein.
2. Benutzen Sie die vier Verfahren, um eine Nullstelle der Funktionen

$$f_1(x) := x + e^x - 2 \quad f_2(x) := 2x - \tan x \quad f_3(x) := -ax^2 + 2a \quad \text{für } a = 2, 1, \frac{1}{4},$$

zu finden. Benutzen Sie für das Fixpunktverfahren die Funktionen

$$g_{1,a}(x) := 2 - e^x, \quad g_{2,a}(x) := \frac{1}{2} \tan x, \quad g_3(x) := -ax^2 + x + 2a, \\ g_{1,b}(x) := \log(2 - x), \quad g_{2,b}(x) := \arctan(2x).$$

Wählen Sie verschiedene Startwerte und testen Sie die Verfahren.

3. Erstellen Sie Diagramme, in denen Sie die Fehler $|x^* - x_k|$ gegen die Anzahl der Schritte auftragen. Tragen Sie in dem Diagramm die y -Werte logarithmisch auf (z.B. `semilogy` in matlab oder python). Vergleichen Sie die vier Verfahren und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Literatur

- [Her20] Martin Hermann. *Numerische Mathematik. Band 1: Algebraische Probleme*. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter, 4th revised and enlarged edition, 2020.