UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

Projekt: Einzugsbereiche des Newton-Verfahrens (Berechnung von Fatou-Mengen)
(empfohlene Gruppengröße: 1)

Es sei f ein gegebenes (komplexes) Polynom vom Grade $K \geq 1$ mit Nullstellen $\{z_k^\star \mid k = 1, \ldots, K\}$. Für einen Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) \neq 0$ ist das Newton-Verfahren anwendbar. Aus der in der Vorlesung behandelten Theorie ist bekannt, dass das Newton-Verfahren quadratisch gegen eine Nullstelle $z^\star$ von f konvergiert, wenn z_0 hinreichend nah an $z^\star$ ist. Für allgemeine Startwerte z_0 mit Newton-Iterierten $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können unter anderem folgende Szenarien eintreten:

- $z_n \to z_k^\star$ für $n \to \infty$ für ein $k \in \{1, \ldots, K\}$,
- das Newton-Verfahren bricht ab, da $f'(z_n) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
- das Newton-Verfahren ist periodisch (aber nicht konvergent), d.h. $z_n = z_m \notin \{z_k^\star | k = 1, \ldots, K\}$ für ein $n \neq m$,
- andere Szenarien, z.B. $z_n \to \infty$.

In diesem Projekt soll experimentell untersucht werden, wie die Einzugsbereiche der Nullstellen beim Newton-Verfahren aussehen. Es sollen also die Mengen

$$F(z_k^\star) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \text{das Newton-Verfahren mit Startwert } z_0 \text{ konvergiert gegen } z_k^\star\}$$

visualisiert werden. Siehe hierzu auch [PR86, S. 27f] und [PR86, S. 93f].

1. Machen Sie sich mit gedämpften Newton-Verfahren vertraut (siehe z.B. [DH19, S. 103], [PR86, S. 101f]). Implementieren Sie das Newton-Verfahren und das gedämpfte Newton-Verfahren. Die Ableitung von f soll ein Input-Parameter sein.

2. Visualisieren Sie die Fatou-Mengen $F(z_k^\star)$ für folgende komplexe Polynomgleichungen

   $$z^2 - 1 = 0, \qquad z^3 - 1 = 0, \qquad 5z^5 - z^3 - 1 = 0$$

   mit Startwerten in

   $$\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| \leq 2, |\mathrm{Im}\, z| \leq 2\}.$$

   Ordnen Sie dabei jedem Startwert abhängig von der Lösung, gegen die das Verfahren konvergiert, eine Farbe zu. Die Anzahl der benötigten Iterationen (bei gegebener Toleranz) kann durch die Helligkeit der Farbe angedeutet werden.

3. Führen Sie die obigen numerischen Experimente für verschiedene (konstante) Dämpfungsparameter $\lambda \in (0, 1)$ durch.

Literatur

[DH19] Peter Deuflhard and Andreas Hohmann. *Numerische Mathematik 1. Eine algorithmisch orientierte Einführung.* De Gruyter Stud. Berlin: de Gruyter, 5th revised and expanded edition edition, 2019.

[PR86] H.-O. Peitgen and P. H. Richter. The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. Berlin etc.: Springer-Verlag. xii, 199 pp., 1986.