UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

Projekt: Vergleich von expliziten und impliziten Finite-Differenzen-Verfahren für die Wellengleichung in 1d (empfohlene Gruppengröße: 3)

Es sei $T > 0$ und $u_0 \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$ und $v_0 \in \mathcal{C}([0,1])$. Man betrachte die Wellengleichung: Finde $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ mit $u(x,0) = u_0(x)$ und $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$ (Anfangsbedingungen), $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$ (Randbedingung) und

$$\ddot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0,$$

wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u nach der Zeit t und u' die Ableitung von u nach dem Ort x bezeichne. Eine Eigenschaft von Lösungen zur Wellengleichung ist, dass diese die Energie

$$E := \frac{1}{2} \int_0^1 \left((\dot{u}(t,x))^2 + (u'(t,x))^2 \right) dx$$

erhalten, d.h. dass E konstant bezüglich t ist. Die Funktion

$$u(t,x) = \cos(\pi t) \sin(\pi x) \tag{1}$$

ist eine Lösung dieser Gleichung für $u_0(x) = \sin(\pi x)$ und $v_0(x) = 0$.

Es seien $\Delta t > 0$ eine Zeitschrittweite und $\Delta x > 0$ eine Schrittweite im Ort und es sei $J := 1/\Delta x \in \mathbb{N}$ und $K := T/\Delta t \in \mathbb{N}$. Setze $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.3.4]) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} U_j^0 &= u_0(j\Delta x) && \text{f. a. } j = 0, \dots, J, \\ U_0^{k+1} = U_J^{k+1} &= 0 && \text{f. a. } k = 1, \dots, K-1 \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} U_j^1 &= (1-\mu^2)U_j^0 + \mu^2(U_{j+1}^0 + U_{j-1}^0)/2 + \Delta t\, v_0(j\Delta x), \\ \frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} &= \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

für alle $j = 1, \dots, J-1$ und $k = 1, \dots, K-1$. Ein (naives) implizites Verfahren ist gegeben durch (2) und

$$\begin{aligned} (2+2\mu^2)U_j^1 - \mu^2(U_{j+1}^1 + U_{j-1}^1) &= 2U_j^0 + 2\Delta t\, v_0(j\Delta x) && \text{f. a. } j = 1, \dots, J-1, \\ \frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} &= \frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} && \text{f. a. } j = 1, \dots, J-1, \\ & && k = 1, \dots, K-1. \end{aligned} \tag{3}$$

Ein zweites implizites Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.3.5]) ist gegeben durch (2) und

$$
\begin{aligned}
&(2+\mu^2)U_j^1 - \frac{\mu^2}{2}(U_{j+1}^1 + U_{j-1}^1) \\
&\qquad = (2-\mu^2)U_j^0 + \frac{\mu^2}{2}(U_{j+1}^0 + U_{j-1}^0) \\
&\qquad\qquad - \Delta t\, \frac{\mu^2}{4}(v_0((j+1)\Delta x) - 2v_0(j\Delta x) + v_0((j-1)\Delta x)), \\
&\frac{U_j^{k+1} - 2U_j^k + U_j^{k-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{4}\Bigg(\frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + 2\frac{U_{j+1}^{k} - 2U_j^{k} + U_{j-1}^{k}}{(\Delta x)^2} \\
&\qquad\qquad + \frac{U_{j+1}^{k-1} - 2U_j^{k-1} + U_{j-1}^{k-1}}{(\Delta x)^2}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

für alle $j = 1, \dots, J-1$ und $k = 1, \dots, K-1$. In beiden impliziten Verfahren kann U_j^{k+1} nicht direkt aus den Vektoren U^k und U^{k-1} berechnet werden, sondern es muss in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Definiere die Matrizen $A, B, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ durch

$$
A = \begin{pmatrix}
2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
-\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2 & -\mu^2 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\mu^2 & 2\mu^2
\end{pmatrix}
$$

und

$$
B := I + A, \quad C_1 := I + \frac{1}{4}A, \quad C_2 := 2I - \frac{1}{2}A, \quad C_3 := -I - \frac{1}{4}A,
$$

wobei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ bezeichnet. Dann kann (3) geschrieben werden als

$$
\begin{aligned}
(I + A)U^1 &= 2U^0 + 2\Delta t V, \\
AU^{k+1} &= 2U^k - U^{k-1},
\end{aligned}
$$

wobei $U^k = (U_1^k, \dots, U_{J-1}^k)$ und $V = (v_0(\Delta x), v_0(2\Delta x), \dots, v_0((J-1)\Delta x))$. Die Vorschrift (4) im zweiten impliziten Verfahren kann geschrieben werden als

$$
\begin{aligned}
2B_1U^1 &= B_2U^0 - \frac{\Delta t}{4}AV, \\
B_1U^{k+1} &= B_2U^k + B_3U^{k-1}.
\end{aligned}
$$

1. Implementieren Sie das explizite und beide impliziten Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrizen A, B, C_1, C_2, C_3 als *sparse*-Matrizen implementieren. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Berechnen Sie mit allen drei Verfahren Approximationen der Lösung (1) für $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001$ und $\Delta x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Für welche Verfahren und für welche Werte von Δt und Δx „explodieren“die berechneten Lösungen?

2. Berechnen Sie den ℓ^∞-Fehler

$$\sup_{j=1,\dots,J;k=0,\dots,K} |u(k\Delta t, j\Delta x) - U_j^k|$$

für die in 1. genannten Werte von Δt uind Δx und vergleichen Sie die drei Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler einmal gegen die Ortsschrittweite Δx auftragen und einmal gegen die Zeitschrittweite Δt. Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten?

3. Überprüfen Sie für die drei Verfahren, ob die (diskreten) Energien

$$E^{k+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - U_j^{k+1}}{\Delta x}\right)\left(\frac{U_{j+1}^{k} - U_j^{k}}{\Delta x}\right),$$

$$\tilde{E}^{k+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-1} \Delta x \left(\frac{U_j^{k+1} - U_{j-1}^{k+1} + U_j^k - U_{j-1}^k}{2\Delta x}\right)^2$$

erhalten bleiben. Kann man dies auch der diskreten Lösung ansehen?

Literatur

[Bar16] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts Appl. Math.* Cham: Springer, 2016.