UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

Projekt: Vergleich von explizitem und implizitem Finite-Differenzen-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung in 1d (empfohlene Gruppengröße: 3)

Es sei $T > 0$ und $u_0 \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Man betrachte die Wärmeleitungsgleichung: Finde $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ mit $u(x,0) = u_0(x)$ für alle $x \in [0,1]$ (Anfangsbedingung), $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$ (Randbedingung) und

$$\dot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0,$$

wobei $\dot{u}$ die Ableitung von u nach der Zeit t und u' die Ableitung von u nach dem Ort x bezeichne. Für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind die sogenannten Energien

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u(t,x)^2\,dx \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t,x))^2\,dx$$

monoton fallend in t. Die Funktion

$$u(t,x) = \exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x) \tag{1}$$

ist eine Lösung dieser Gleichung für $u_0(x) = \sin(\pi x)$.

Es seien $\Delta t > 0$ eine Zeitschrittweite und $\Delta x > 0$ eine Schrittweite im Ort und es sei $J := 1/\Delta x \in \mathbb{N}$ und $K := T/\Delta t \in \mathbb{N}$. Ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.2.4]) ist gegeben durch $U_j^0 = u_0(j\Delta x)$ für alle $j = 0, \dots, J$ und $U_0^k = U_J^k = 0$ und

$$\frac{1}{\Delta t}(U_j^{k+1} - U_j^k) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}^k - 2U_j^k + U_{j+1}^k) \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, J-1 \text{ und } k = 1, \dots, K.$$

Ein implizites Finite-Differenzen-Verfahren (siehe auch [Bar16, Abschnitt 1.2.5]) ist gegeben durch $U_j^0 = u_0(j\Delta x)$ für alle $j = 0, \dots, J$ und $U_0^k = U_J^k = 0$ und

$$\frac{1}{\Delta t}(U_j^{k+1} - U_j^k) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j+1}^{k+1}) \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, J-1 \text{ und } k = 1, \dots, K.$$

In diesem Verfahren, kann U_j^{k+1} nicht direkt aus dem Vektor U^k berechnet werden, sondern es muss in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Definiere $\lambda := \Delta t/(\Delta x)^2$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}.$$

Das implizite Verfahren ist dann äquivalent zu

$$AU^{k+1} = U^k,$$

wobei $U^k = (U_1^k, \dots, U_{J-1}^k)$.

1. Implementieren Sie das explizite und das implizite Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie A als *sparse*-Matrix implementieren. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Berechnen Sie damit Approximationen der Lösung (1) für $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ und $\Delta x = 0.1, 0.01$ mit beiden Verfahren. Für welche Werte von Δt und Δx und für welche Verfahren „explodieren“ die berechneten Lösungen?

2. Es bezeichne $u_j^k := u(k\Delta t, j\Delta x)$. Berechnen Sie den L^∞-Fehler, den (diskreten) L^2-Fehler und den (diskreten) L^2-H^1-Fehler

$$\|u - U\|_\infty := \sup_{j=1,\dots,J;k=0,\dots,K} |u_j^k - U_j^k|,$$

$$\|u - U\|_{h,L^2(L^2)} := \sqrt{\sum_{k=0}^K \Delta t \sum_{j=1}^J \Delta x \left(u_j^k - U_j^k\right)^2},$$

$$\|u - U\|_{h,L^2(H^1)} := \sqrt{\sum_{k=0}^K \Delta t \sum_{j=1}^J \Delta x \left|\frac{(u_j^k - U_j^k) - (u_{j-1}^k - U_{j-1}^k)}{\Delta x}\right|^2}$$

   für die in 1. genannten Werte von Δt und Δx und vergleichen Sie die beiden Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler einmal gegen die Ortsschrittweite Δx auftragen und einmal gegen die Zeitschrittweite Δt. Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten?

3. Überprüfen Sie für beide Verfahren, ob die (diskreten) Energien

$$\sum_{j=1}^J \Delta x (U_j^k)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^J \Delta x \left|\frac{U_j^k - U_{j-1}^k}{\Delta x}\right|^2$$

   monoton fallend sind.

Literatur

[Bar16] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts Appl. Math.* Cham: Springer, 2016.