UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

# Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

**Projekt: Homogenisierung in 1D** (empfohlene Gruppengröße: 1)

Für einen gegebenen Koeffizienten $a_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ soll ein $u_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ gefunden werden, das die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -(a_\varepsilon(x)\, u_\varepsilon'(x))' &= 1 \qquad \text{für alle } x \in (0,1), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllt. Für den Koeffizienten

$$a_\varepsilon(x) := \frac{1}{2 - \cos(2\pi \frac{x}{\varepsilon})} \tag{2}$$

ist eine Lösung gegeben durch $u_\varepsilon(x) = u_0(x) + u_1(x)$ mit $u_0(x) = x - x^2$ und

$$u_1(x) = -\varepsilon \left( \frac{1}{4\pi} \sin\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{4\pi^2} \cos\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{\varepsilon}{4\pi^2} \right).$$

Das Randwertproblem (1) kann mittels Finiter Differenzen wie folgt approximiert werden. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $\Delta x := 1/N$ und $x_j := j\Delta x$ für $j = 0, \ldots, N$. Es sei weiterhin $A_j := a_\varepsilon(x_j)$. Dann ist ein Finite-Differenzen-Verfahren gegeben durch $U_0 = U_N = 0$ und

$$-\frac{A_j U_{j+1} - (A_j + A_{j-1}) U_j + A_{j-1} U_{j-1}}{(\Delta x)^2} = 1.$$

Die Matrix $S \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ sei definiert durch

$$\begin{pmatrix} A_0 + A_1 & -A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -A_1 & A_1 + A_2 & -A_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -A_2 & A_2 + A_3 & -A_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -A_{N-4} & A_{N-4} + A_{N-3} & -A_{N-3} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -A_{N-3} & A_{N-3} + A_{N-2} & -A_{N-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -A_{N-2} & A_{N-2} + A_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Setze $F = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Dann ist das oben beschriebene Finite-Differenzen-Verfahren äquivalent zu

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} S\, U = F,$$

wobei $U = (U_1, \ldots, U_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$.

1. Implementieren Sie das oben angegebene Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrix $S$ als *sparse*-Matrix erstellen. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

2. Berechnen Sie damit eine Approximation der Lösung für den Koeffizienten aus (2) für die Werte $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Wählen Sie dabei $N = 4, 10, 50, 100, 500, 1000, 2000$. Stellen Sie die exakte Lösung und die diskreten Lösungen graphisch dar. Wie groß muss $N$ in Abhängigkeit von $\varepsilon$ gewählt werden, damit eine sinnvolle numerische Lösung berechnet wird?

3. Berechnen Sie die diskrete Lösung des obigen Finite-Differenzen-Verfahrens zum konstanten, homogenisierten Koeffizienten $a_0$, der durch

$$a_0 := \frac{1}{\int_0^1 a_\varepsilon^{-1}(x)\,dx}$$

gegeben ist. Stellen Sie auch diese Lösungen graphisch dar und vergleichen Sie sie mit der exakten Lösung und der in 2 berechneten.

4. Führen Sie nun die Experimente aus den Aufgabenschritten 2 und 3 mit dem Koeffizienten

$$a_\varepsilon(x) := \left(1 + \frac{x}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}$$

durch. Berechnen Sie den homogenisierten Koeffizienten mit Hilfe eines Computer Algebra Systems (also außerhalb des eigentlichen Programms). Vergleichen Sie die diskreten Lösungen mit der Finite-Differenzen-Lösung für ein $N$ in der Größenordnung, die Sie in 2 ermittelt haben.