UNIVERSITÄT LEIPZIG

Jun.-Prof. Dr. Mira Schedensack
Mathematisches Institut
Universität Leipzig

Numerisches Praktikum

WS 2022/2023 & SS 2023

Projekt: Finite Differenzen für die Konvektions-Diffusions-Gleichung in 1d (empfohlene Gruppengröße: 3)

Die Konvektions-Diffusions-Gleichung lautet

$$-\varepsilon u'' + u' = 1. \tag{1}$$

Beim zugehörigen Randwertproblem wird eine Lösung $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ für die Gleichung (1) gesucht. Typische Lösungen zu dieser Gleichung entwickeln steile Randschichten für kleine Werte von ε. Eine exakte Lösung ist durch

$$u(x) = \frac{e^{(x-1)/\varepsilon} - 1}{e^{-1/\varepsilon} - 1} + x - 1$$

gegeben.
Wir betrachten im folgenden drei verschiedene Finite-Differenzen-Verfahren für dieses Problem, siehe auch [RST08, Abschnitt 2.1.2]. Es sei $N \in \mathbb{N}$, $\Delta x := 1/N$ und $x_j := j\Delta x$ für $j = 0, \dots, N$. Ein Finite-Differenzen-Verfahren zur Approximation von Lösungen von (1) ist gegeben durch $U_0 = U_N = 0$ und

$$-\varepsilon \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2\Delta x} = 1$$

für alle $j = 1, \dots, N-1$. Ein zweites Finite-Differenzen-Verfahren ist gegeben durch $U_0 = U_N = 0$ und

$$-\varepsilon \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} = 1$$

für alle $j = 1, \dots, N-1$. In einem dritten Finite-Differenzen-Verfahren ist eine Approximation von (1) gegeben durch $U_0 = U_N = 0$ und

$$-\varepsilon \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} = 1$$

für alle $j = 1, \dots, N-1$. Die Matrizen $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ seien definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$C = -B^\top$ und $D = B + C$. Setze $F = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Dann ist das erste Verfahren äquivalent zu

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Delta x|^2} A + \frac{1}{2|\Delta x|} D \right) U = F,$$

das zweite zu

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Delta x|^2} A + \frac{1}{|\Delta x|} B \right) U = F$$

und das dritte zu

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Delta x|^2} A + \frac{1}{|\Delta x|} C \right) U = F,$$

wobei $U = (U_1, \dots, U_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$.

1. Implemenieren Sie die drei obigen Verfahren. Beachten Sie dabei, dass Sie die Matrizen A, B, C und D als *sparse*-Matrizen erstellen. Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme können Sie auf existierende Routinen (für *sparse*-Matrizen) zurückgreifen, z.B. auf die python-Routine `scipy.sparse.linalg.spsolve`.

2. Führen Sie numerische Tests durch für die Parameter $\varepsilon = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005$. Stellen Sie die exakte Lösung und die diskreten Lösungen für die Gitterweiten $N = 10$, $N = 100$ und $N = 1000$ und $N = 10000$ graphisch dar. Vergleichen Sie die drei Verfahren für diese Wahl von Parametern.

3. Setze $\hat{u} = (u(x_0), \dots, u(x_N))^\top \in \mathbb{R}^{N+1}$. Berechnen Sie die Fehler

$$\begin{aligned} &\|\hat{u} - U\|_{\ell^\infty}\ , \\ &\|\hat{u} - U\|_{h,L^2} := \sqrt{\Delta x} \|\hat{u} - U\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N} \Delta x \, |\hat{u}_j - U_j|^2}\ , \\ &\|\hat{u} - U\|_{h,H^1} := \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Delta x \left| \frac{(\hat{u}_j - U_j) - (\hat{u}_{j-1} - U_{j-1})}{\Delta x} \right|^2} \end{aligned}$$

   für die in 2 genannten Werte von ε und Δx und vergleichen Sie die drei Verfahren. Erstellen Sie Diagramme (loglog-plots), in denen Sie die Fehler gegen die Schrittweite Δx auftragen. Welche Konvergenzraten lassen sich beobachten? Welche Vorasymptotik lässt sich beobachten?

Literatur

[RST08] Hans-Görg Roos, Martin Stynes, and Lutz Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems*, volume 24 of *Springer Ser. Comput. Math.* Berlin: Springer, 2nd ed. edition, 2008.