Kurzzusammenfassung zur Vorlesung „Numerik 2“ im WS 23/24

M. Schedensack

Stand: 31. Januar 2024

Die Inhalte der Kapitel 2–5 können größtenteils [Bar16b, Teil III] entnommen werden.

2 Einschrittverfahren für ODEs

Die Kern-Aussage dieses Kapitels ist, dass aus der (lokalen) Konsistenz eines Einschrittverfahrens die (globale) Konvergenz des Verfahrens folgt. Dies folgt mit einer diskreten Version des Lemmas von Gronwall.

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: Einschrittverfahren, (diskretes) Lemma von Gronwall, Konsistenz eines Einschrittverfahrens, Konvergenzordnung eines Einschrittverfahrens, Konvergenz eines konsistenten Einschrittverfahrens

3 Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren sind speziell aufgebaute Einschrittverfahren, die implizit oder explizit sein können und über eine Quadraturformel motiviert sind. Sie werden durch ein Butcher-Tableau beschrieben. Für hinreichend kleine Schrittweiten existiert auch beim impliziten Verfahren eine (diskrete) Lösung. Konsistente Runge-Kutta-Verfahren einer Ordnung p basieren immer auf Quadraturformeln mit Exaktheitsgrad $p-1$.

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: implizites und explizites Runge-Kutta-Verfahren, Butcher-Tableau, implizites und explizites Euler-Verfahren, implizites und explizites Mittelpunktverfahren, Zusammenhang Exaktheitsgrad von Quadraturformeln und Konsistenzordnung

4 Mehrschrittverfahren

Mehrschrittverfahren berechnen aus mehreren gegebenen Werten den nächsten Iterationsschritt. Dadurch können Berechnungen aus vorherigen Schritten besser genutzt werden. Eine Kombination aus einem expliziten und einem impliziten Mehrschrittverfahren kann die Konsistenzordnung des expliziten erhöhen, das Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems aber umgehen. Im Gegensatz zu Einschrittverfahren wird für die Konvergenz des Verfahrens zusätzlich zur Konsistenz noch die Nullstabilität benötigt. Diese kann über die Dahlquistsche Wurzelbedingung der Begleitmatrix untersucht werden.

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: allgemeines Mehrschrittverfahren, Konsistenz von Mehrschrittverfahren, Adams-Bashforth- und Adams-Moulton-Verfahren, Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren, Nullstabilität, Dahlquistsche Wurzelbedingung, Konvergenz von Mehrschrittverfahren

5 Steife Differentialgleichungen

Steife Differentialgleichungen werden von einigen Verfahren schlecht approximiert. Die A-Stabilität eines Verfahrens garaniert, dass ein Verfahren auch für steife Differentialgleichungen gute Approximationen berechnet. Die A-Stabilität kann über die Stabilitätsfunktion gezeigt werden. Explizite Runge-Kutta-Verfahren sind nicht A-stabil, deshalb sind implizite Verfahren im Allgemeinen für steife Differentialgleichungen vorzuziehen. Steife Differentialgleichungen kommen häufig als Gradientenflüsse vor. Für das implizite Euler-Verfahren kann in diesem Falle eine diskrete Energieminimierung (analog zu einer kontinuierlichen) gezeigt werden.

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: steife Differentialgleichungen, A-Stabilität, Stabilitätsfunktion, Gradientenflüsse

6 Finite Differenzen für zeitabhängige PDEs

Dies Kapitel umfasst die Finite-Differenzen-Methoden *explizites Euler-Verfahren*, *implizites Euler-Verfahren* und das *Crank-Nicolson-Verfahren* für die Wärmeleitungsgleichung $\dot{u} - \Delta u = f$ (siehe [Bar16a, Kap. 1.1.3 und Kap. 1.2]) und ihre Fehleranalysis. Außerdem wird das *explizite Finite-Differenzen-Verfahren* für die Transportgleichung $\dot{u} + a\partial_x u = f$ definiert und eine Fehlerabschätzung hierfür bewiesen (siehe [Bar16a, Kap. 1.1.2–1.1.7]). Die Wellengleichung $\ddot{u} - \Delta u = f$ (siehe [Bar16a, Kap. 1.3]) wird mit dem expliziten *leapfrog*-Verfahren diskretisiert. Die Fehleranalysis folgt vermöge einer Energieerhaltung.

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: Vorwärts-, Rückwärtsdifferenzenquotient, symmetrischer Differenzenquotient erster und zweiter Ordnung, explizites Euler-Verfahren, implizites Euler-Verfahren, Crank-Nicolson-Verfahren, jeweils Stabilität und Konvergenz der Verfahren, leapfrog-Verfahren, Stabilität und Konvergenz des leapfrog-Verfahrens, CFL-Bedingung

7 Finite-Elemente-Methoden für Elliptische Probleme

Gesucht ist $u \in V$ mit

$$a(u, v) = F(v) \qquad \text{für alle } v \in V$$

mit elliptischer (koerzitiver), stetiger Bilinearform a. Als Modell-Problem dient das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ in der schwachen Formulierung (siehe [Bar16a, Kap. 2.4]). Die schwache Formulierung basiert auf Sobolev-Räumen (siehe [Bar16a, Kap. 2.3]).

Als Diskretisierungen wurden Galerkin-Verfahren betrachtet (siehe zum Beipsiel [Bar16a, Kap. 2.4.2]) und konforme Finite Elemente Methoden (FEM) beliebiger Ordnung. Nach Céas Lemma ist der Diskretisierungsfehler beschränkt durch den reinen Approximationsfehler der Raumes. Dieser kann vermöge des Bramble-Hilbert-Lemmas weiter abgeschätzt werden. Dies beweist für eine P_k-FEM

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

siehe [Bar16a, Kap. 3.1]. Speziell wurde die konforme P_1-FEM betrachtet und ihre Implementierung wurde besprochen (siehe [Bar16a, Kap. 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1]).

Begriffe und Sätze, die bekannt sein sollten: Satz von Lax-Milgram, Céa's Lemma, Steifigkeitsmatrix, Lipschitz-Gebiet, Satz von Gauß/partielle Integration, schwache Formulierung des Poisson-Problems, schwache Differenzierbarkeit, Sobolev-Räume, Spuroperator, Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, (reguläre) Triangulierung, Form-Regularität, Finites Element, duale Basis, Bramble-Hilbert-Lemma, Transformationsformeln, Abschätzung für Interpolationsfehler, Abschätzung des FEM-Fehlers für affine Familien, Aubin-Nitsche-Lemma, Implementierung von P_1-FEM, barycentrische Koordinaten

Literatur

[Bar16a] Sören Bartels. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 64 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, [Cham], 2016.

[Bar16b] Sören Bartels. *Numerik* 3×9. *Drei Themengebiete in jeweils neun kurzen Kapiteln.* Springer-Lehrb. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.