# Aufgabenblatt 9

Abgabe bis zum 27.06.2023

**Aufgabe 1 (Beweis von Satz V.15 aus der Vorlesung)**
Es sei $s_n \in S^{3,2}(\mathscr{T}_n)$ der interpolierende natürliche Spline zu den Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ mit Werten $y_j$, d.h. $s_n(x_j) = y_j$. Es seien $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$, $a_2^{(j)}$, $a_3^{(j)}$ so, dass

$$s_n|_{[x_j,x_{j+1}]}(x) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}(x-x_j) + a_2^{(j)}(x-x_j)^2 + a_3^{(j)}(x-x_j)^3.$$

Es sei $h_j := x_{j+1} - x_j$. Dann gilt

$$a_0^{(j)} = y_j, \quad a_3^{(j)} = \frac{a_2^{(j+1)} - a_2^{(j)}}{3h_j} \quad a_1^{(j)} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - h_j a_2^{(j)} - h_j^2 a_3^{(j)}$$

und die $a_2^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ lösen das LGS

$$a_2^{(0)} = 0, \quad a_2^{(n)} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{h_j}{3} a_2^{(j)} + \frac{2(h_{j+1} + h_j)}{3} a_2^{(j+1)} + \frac{h_{j+1}}{3} a_2^{(j+2)} = \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

für $j = 0, \ldots, n-2$.

**Aufgabe 2 (Transformation einer Quadraturformel)**
Es sei $Q$ eine Quadraturformel auf dem Interval $[a,b]$ mit Quadraturpunkten $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ und Gewichten $(w_j)_{j=0,\ldots,n}$. Leiten Sie durch eine Transformation eine Quadraturformel $\tilde{Q}$ auf dem Interval $[c,d]$ her, die den gleichen Exaktheitsgrad hat.

**Aufgabe 3 (Exaktheitsgrad von Quadraturregeln)**
Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsregel Exaktheitsgrad 1 hat, die Trapezregel Exaktheitsgrad 1 und die Simpsonregel Exaktheitsgrad 3. Zeigen Sie, dass die drei Regeln nicht exakt von einem höheren Grad sind.

**Aufgabe 4**
Die Quadraturformel $Q : C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ sei exakt vom Grad 2q und die zugehörigen Gewichte $(w_i)_{i=0,\ldots,n}$ und Knoten $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ seien symmetrisch bezüglich dem Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ angeordnet. Zeigen Sie, dass $Q$ exakt vom Grad $2q+1$ ist.