

Aufgabenblatt 8

Abgabe bis zum 19.06.2023

Aufgabe 1 (Neville-Schema)

An einem 21. Dezember wurden folgende Tageslängen gemessen

Ort	Tageslänge	Lage
Berlin	7h39m	52,5°N
Rom	9h07m	41,9°N
Helsinki	5h49m	60,2°N
Minsk	7h23m	53,9°N
Marseille	8h58m	43,3°N
Santiago de Chile	14h20m	33,4°N

Bestimmen Sie die Tageslänge in Leipzig (51,3°N) durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus.

Bemerkung: Wenn Sie von Hand rechnen, reicht vierstellige Dezimalrechnung.

Aufgabe 2 (optimale Wahl von Stützstellen auf beliebigem Intervall)

Berechnen Sie die optimalen Stützstellen $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ im Sinne von

$$\min_{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \max_{x \in [a, b]} |\Pi_{j=0}^n (x - x_j)| = \max_{x \in [a, b]} |\Pi_{j=0}^n (x - t_j)|$$

für ein beliebiges (beschränktes) Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Berechnen Sie außerdem den Wert

$$\max_{x \in [a, b]} |\Pi_{j=0}^n (x - t_j)|.$$

Aufgabe 3 (Kubische Splines)

Es sei \mathcal{T}_2 die Partitionierung von $[0, 2]$ bezüglich der Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Es bezeichne $S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$ den Raum der natürlichen kubischen Spline-Funktionen zu \mathcal{T}_2 .

(a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$?

$$(i) f(x) = x^3 - x^2 \quad (ii) f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3 \quad (iii) f(x) = \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3$$

(b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S_0^{3,2}(\mathcal{T}_2)$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$ und $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 26.06.2023)

- (a) Implementieren Sie das cg-Verfahren. Als Abbruchbedingung können Sie die Bedingung

$$\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-8}$$

wählen.

- (b) Lösen Sie mit Hilfe dieses Programms das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_PDE` in der Datei `solve_PDE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen). Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihr Programm benötigt mit denen, die die LR-Zerlegung vom Aufgabenblatt 3, das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren vom Aufgabenblatt 6 benötigen.

Die Abgabe des Codes erfolgt per E-Mail an die auf der Vorlesungswebsite angegebene E-Mail-Adresse. Für den Aufgabenteil (b) genügt es, die Zeiten für $N = 3, \dots, 5$ auf dem Aufgabenblatt anzugeben.