Aufgabenblatt 7

Abgabe bis zum 12.06.2023

Aufgabe 1 (Kondition von s.p.d Matrizen)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit (s.p.d.). Zeigen Sie

(a) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^2 ein Eigenwert von $A^* A$ ist.

(b) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

(c) Es ist $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$ für den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A.

(d) Es ist $\operatorname{cond}_2(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, wobei $\lambda_{\min}$ den betragskleinsten Eigenwert von A bezeichnet.

Aufgabe 2 (Beweis von Lemma IV.38 aus der Vorlesung)
Es seien T_n die Tschebyscheff-Polynome aus der Vorlesung. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $|T_n(t)| \le 1$ f.a. $t \in [-1,1]$.

(ii) Mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ gilt

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \qquad \text{für alle } t \in [-1,1].$$

Insbesondere ist T_n ein Polynom n-ten Grades auf $[-1,1]$ und für $n \ge 1$ folgt $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q_{n-1}(t)$, wobei q_{n-1} ein Polynom $(n-1)$-ten Grades auf $[-1,1]$ ist.

(iii) Für $n \ge 1$ hat T_n die Nullstellen $t_j = \cos(\frac{(j+1/2)\pi}{n})$ für $j = 0,1,...,n-1$ und die Extremstellen s_j für $j = 0,1,\dots,n$ mit

$$T_n(s_j) = \begin{cases} +1 & j \text{ gerade,} \\ -1 & j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(iv) Es gilt $T_n(t) = \frac{1}{2}\left((t+\sqrt{t^2+1})^n + (t-\sqrt{t^2-1})^n\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Aufgabe 3 (Vorkonditioniertes cg-Verfahren)
Gesucht ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^\star = b$. Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und es sei $B = CC^\top$.

1. Substituieren Sie $y^\star = C^{-1}x^\star$ und leiten Sie damit ein Energiefunktional

$$\tilde{f}(y) := \frac{1}{2}y^\top \tilde{A} y - \tilde{b}^\top y$$

her, das von $y^\star$ minimiert wird.

2. Es bezeichnen nun $\tilde{r}_k$ und $\tilde{d}_k$ das Residuum und die Abstiegsrichtung im cg-Verfahren bezüglich des modifizierten Problems. Substituieren Sie nun

$$\begin{aligned} y_k &= C^{-1} x_k, \\ r_k &= C^\top \tilde{r}_k, \\ d_k &= C\tilde{d}_k \end{aligned}$$

und schreiben Sie das cg-Verfahren zur Lösung von $\tilde{A}y = \tilde{b}$ so um, dass nur noch die Matrix B vorkommt, aber die Matrix C nicht mehr bekannt sein muss.

3. Zeigen Sie für das hergeleitete Verfahren eine Fehlerabschätzung, wobei Sie die Fehlerabschätzung für das cg-Verfahren aus der Vorlesung benutzen können.

Aufgabe 4 (Vorkonditionierung einer Matrix)
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2^{n-4} & 2^{n-2} & 2^{n-3} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{n-3} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass die Kondition von A durch $10 \cdot 2^{n-3}$ beschränkt ist.

2. Definieren Sie eine Diagonalmatrix D derart, dass die Kondition von $D^{-1}A$ durch 7 beschränkt ist.