Aufgabenblatt 6

Abgabe bis zum 31.05.2023

Aufgabe 1 (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens)
Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel-Verfahren für eine stark diagonaldominante Matrix A bzw. für eine diagonaldominante, irreduzible Matrix A konvergiert. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

(a) Zeigen Sie, dass die Iterationsmatrix $G = (D+L)^{-1}R$ die Gleichung $Gx = D^{-1}(Rx - LGx)$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie induktiv, dass $|(Gx)_j| \leq \|x\|_\infty$ gilt, wobei die Ungleichung strikt ist, wenn A stark diagonaldominant ist.

(c) Zeigen Sie, dass daraus für stark diagonaldominantes A die Konvergenz folgt.

(d) Ist A diagonaldominant und irreduzibel, dann gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung im Beweis der Konvergenz des Jacobi-Verfahrens vor und unterteilen Sie die Indizes eines Eigenvektors x mit $\|x\|_\infty = 1$ in diejenigen, für die $|x_j| = 1$ gilt, und den Rest. Schließen Sie nun, dass aus der Irreduziblität von A folgt, dass $J^c = \emptyset$ und aus der einen strikten Ungleichung in der Definition der Diagonaldominanz folgt nun die Behauptung.

Aufgabe 2 (Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für FEM-Matrix)
Zeigen Sie, dass das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren für die Steifigkeitsmatrix A aus der Einleitung der Vorlesung anwendbar ist und konvergiert.

Aufgabe 3 (Beweis von Lemma IV.26 aus der Vorlesung)
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d. (symmetrisch positiv definit) und $b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Ax = b \Leftrightarrow \min_{z\in\mathbb{R}^n} f(z),$$

wobei das Energiefunktional durch $f(z) := \frac{1}{2} z^\top Az - z^\top b$ definiert ist.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 05.06.2023)

(a) Implementieren Sie das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren. Als Abbruchbedingung können Sie die Bedingung

$$\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-8}$$

wählen.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Programme das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_PDE` in der Datei `solve_PDE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen). Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihre Programm benötigen mit denen, die die LR-Zerlegung vom Aufgabenblatt 3 und der Backslash Operator benötigen.

Die Abgabe des Codes erfolgt per E-Mail an die auf der Vorlesungswebsite angegebene E-Mail-Adresse. Für den Aufgabenteile (b) genügt es, die Zeiten für $N = 3, \ldots, 5$ auf dem Aufgabenblatt anzugeben.