

Aufgabenblatt 4

Abgabe bis zum 17.05.2023

Aufgabe 1

Man zeige:

(a) Für $|\varepsilon| \leq \text{eps} < 1$ gilt

$$(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{\text{eps}}{1 - \text{eps}}.$$

(b) Für $|\varepsilon_i| \leq \text{eps}/(1 - \text{eps})$, $i = 1, \dots, k$, gilt

$$\prod_{i=1}^k (1 + \varepsilon_i) = 1 + \bar{\varepsilon} \text{ mit } |\bar{\varepsilon}| \leq \frac{k \text{ eps}}{1 - k \text{ eps}},$$

solange nur $k \text{ eps} < 1$ ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Aufgabe $\phi(x) = (1/x) - (1/(x+1))$ für große Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Verfahren $\tilde{\phi}(x) = (1/x) - (1/(x+1))$ instabil ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Verfahren $\tilde{\phi}(x) = 1/(x(x+1))$ stabil ist. Hinweis: Identifizieren Sie die dominierenden Terme des Ausdrucks

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \left(\frac{1 + \varepsilon_2}{x(1 + \varepsilon_1)} - \frac{1 + \varepsilon_4}{(x(1 + \varepsilon_1) + 1)(1 + \varepsilon_3)} \right) (1 + \varepsilon_5)$$

und betrachten Sie den Quotienten $|\tilde{\phi}(\tilde{x}) - \phi(x)|/|\phi(x)|$. Verwenden Sie dabei Approximationen $1/(1 + \varepsilon) \approx 1 - \varepsilon$ und $1/(1 + \varepsilon + (1/x)) \approx 1 - \varepsilon - 1/x$.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $\|\cdot\|$ eine von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass $\|A^{-1}\| = (\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|)^{-1}$ und $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$ gelten.

Aufgabe 4

In einem physikalischen Versuch sollen die Parameter $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ einer Parabel der Form

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

ermittelt werden. Folgende Messwerte liegen vor

x=	2	3	4	5
y=	90	75	65	40

- (a) Stellen Sie ein (ggfs. überbestimmtes) LGS für p auf.
- (b) Bestimmen Sie die optimalen Parameter $\tilde{p} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathbb{R}^3$ im Sinne der Kleinste-Quadrate-Lösung. (Auf tretende LGS können Sie mit dem Rechner lösen).
- (c) Stellen Sie die ermittelte Parabel graphisch dar. Zeichnen Sie auch die Messwerte in das Diagramm ein.