

Aufgabenblatt 3

Abgabe bis zum 03.05.2023

Aufgabe 1 (Maschinenzahlen)

- Vergleichen Sie die Festpunktzahlen mit $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$ und die Gleitkommazahlen zur Basis $b = 10$ mit Mantissenlänge 1 und Exponent $e \in \{-1, 0, 1\}$.
 - Was ist jeweils die kleinste positive und die größte positive darstellbare Zahl?
 - Wie viele darstellbare positive Zahlen gibt es jeweils?
 - Skizzieren Sie die Verteilung der darstellbaren positiven Zahlen auf einem Zahlenstrahl.
- Betrachten Sie die Maschinenzahlen $\pm mb^e$ mit Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, Exponent $-L \leq e \leq U$ und Mantisse m mit Mantissenlänge r wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass für alle x aus dem zulässigen Bereich gilt:

$$|x - \text{rd}(x)| = \min_{y \in A} |x - y|,$$

$$|x - \text{rd}(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e,$$

$$\frac{|x - \text{rd}(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{1-r}.$$

Aufgabe 2 (Normäquivalenz in endlich dimensionalen Vektorräumen, Beweis von Satz III.11)

Es seien $\|\bullet\|$ und $\|\bullet\|'$ zwei Normen auf \mathbb{K}^n . Dann gibt es $0 < c \leq C < \infty$ derart, dass

$$\forall x \in V: \quad c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|.$$

Aufgabe 3 (Beispiele zu Normen, Beispiel III.15 aus Vorlesung)

Beweisen Sie folgende Aussagen.

- Die Frobeniusnorm ist mit $\|\bullet\|_2$ verträglich, aber nicht die von $\|\bullet\|_2$ erzeugte Norm.
- Die Operatornorm zu $\|\bullet\|_\infty$ ist die Norm der "maximalen Zeilensumme":

$$\|A\|_\infty = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|.$$

- Die Operatornorm zu $\|\bullet\|_1$ ist die Norm der "maximalen Spaltensumme"

$$\|A\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |A_{j,k}|.$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 08.05.2023)

- (a) Ergänzen Sie das Programm `solve_LGS_gauss.jl`, sodass es die LR-Zerlegung umsetzt. Die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution sind bereits in `solve_LGS_gauss.jl` enthalten.
- (b) Lösen Sie mit Hilfe dieses Programms das lineare Gleichungssystem in der Methode `solve_linear_PDE` in der Datei `solve_PDE_1.jl` (statt dieses mit dem Backslash-Operator zu lösen).
- (c) Bestimmen Sie mit dem Befehle `nnz` die Anzahl der Nicht-Null-Einträge in der Steifigkeitsmatrix, in L und in R .
- (d) Vergleichen Sie die Zeiten, die Ihr Programm benötigt mit denen, die der Backslash-Operator benötigt.

Die Abgabe des Codes erfolgt per E-Mail an die auf der Vorlesungswebsite angegebene E-Mail-Adresse. Für die Aufgabenteile (c) und (d) genügt es, die Nicht-Null-Einträge bzw. die Zeiten für $N = 3, \dots, 5$ auf dem Aufgabenblatt anzugeben.