Aufgabenblatt 2

Abgabe bis zum 24.04.2023

Aufgabe 1 (symmetrisch positiv definite Matrizen)
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch positiv definit (s.p.d.), wenn $A^\top = A$ und wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $x^\top Ax > 0$.
Es sei A symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie

(a) für alle $j = 1,\dots,n$ gilt $a_{jj} > 0$.

(b) besitzt $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ Rang k, dann ist $X^\top AX$ positiv definit.

Aufgabe 2 (Cholesky-Zerlegung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit. Zeigen Sie

(a) Der erste Schritt der LR-Zerlegung ist ohne Pivotsuche durchführbar.

(b) Es sei L_1 die Matrix aus dem ersten Schritt der LR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass

$$L_1 A L_1^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $B^{(2)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $B^{(2)}$ symmetrisch positiv definit ist.

(d) Schließen Sie, dass die LR-Zerlegung für symmetrisch positiv definite Matrizen ohne Pivotsuche durchführbar ist und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit

$$A = LDL^\top.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Determinante von Matrizen)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit einer LR-Zerlegung $A = LR$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L mit 1en auf der Diagonalen und einer oberen Dreiecksmatrix R.

1. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Determinante $\det(A)$ her.

2. Vergleichen Sie die Anzahl an arithmetischen Operationen für die drei folgenden Vorgehensweisen zur Berechnung der Determinante von A:

- Berechnung der LR-Zerlegung plus die Auswertung der von Ihnen hergeleiteten Formel
- Auswertung der Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

- Auswertung der Entwicklungsformel nach der k-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{jk} \det(A_{jk}),$$

  wobei A_{jk} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte von A entsteht. Hierbei soll die Berechnung der Determinante der entstehenden Untermatrizen A_{jk} iterativ wieder mit der Entwicklungsformel geschehen.

Aufgabe 4 (Eindeutigkeit der LR-Zerlegung)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre (d.h. invertierbare) Matrix mit einer LR-Zerlegung $A = LR$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L mit 1en auf der Diagonalen und einer oberen Dreiecksmatrix R. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung eindeutig ist.