

Aufgabenblatt 10

Abgabe bis zum 03.07.2023

Aufgabe 1 (Orthogonalpolynome)

- (a) Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind. Es sei $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega > 0$ und $\int_a^b \omega dx < \infty$. Definiere

$$L_\omega^2(a, b) := \left\{ f \in L^1(\Omega) \mid \int_a^b |f|^2 \omega dx < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$(f, g)_\omega := \int_a^b f g \omega dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum $L_\omega^2(a, b)$ definiert wird.

- (b) Zeigen Sie, dass die sogenannten Legendre-Polynome

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

erfüllen, dass $p_n \in P_n$ und $(p_n, p_k)_\omega = 0$ für $k \neq n$ und $\omega = 1$.

Aufgabe 2 (Tschebyscheff-Polynome sind Orthogonalpolynome)

Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_n orthogonal sind bezüglich des in Aufgabe 1(a) definierten Skalarproduktes mit $\omega = (1 - x^2)^{-1/2}$.

Aufgabe 3 (Integration auf Rechtecken)

Es sei Q eine Quadraturformel auf $[a_0, b_0]$ mit Exaktheitsgrad n . Leiten Sie hieraus eine Quadraturformel \tilde{Q} auf einem Rechteck $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ her, die denselben Exaktheitsgrad hat, in dem Sinne, dass ein Polynom der Form $p(x, y) = p_1(x) p_2(y)$ mit Polynomen $p_1, p_2 \in P_n$ exakt integriert wird.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe, Abgabe bis 10.06.2023)

- (a) Ergänzen Sie die Funktion `integrate1d(f, a, b, p)` in der Datei `integrate.jl` derart, dass es das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der Gauß-Quadratur approximiert. Dabei soll die Funktion für $p \leq 9$ Polynome des Grades p exakt integrieren.
- (b) Ergänzen Sie das Programm `integrate2d(f, a, b, p)` derart, dass es für das Rechteck $R := (a[1], a[2]) \times (b[1], b[2])$ das Integral $\int_R f(x, y) dx dy$ approximiert. Benutzen Sie hierfür die in Aufgabe 3 hergeleitete Quadraturregel.

- (c) Ergänzen Sie den letzten Parameter in den Zeilen 84, 86, 88 und 90 in der Datei `solve_PDE_2.jl`, sodass die rechte Seite

$$\int_{\Omega} f \varphi dx$$

in der Funktion `get_right_hand_side_Q1FEM(n, f)` für das in der Datei `solve_PDE_2.jl` vorgegebene f (definiert in der Funktion `rhs(x)`) exakt integriert wird. Lassen Sie das Programm laufen. Mit diesem Programm kann die Lösung der partiellen Differentialgleichung aus der Einleitung für allgemeinere rechte Seiten f approximiert werden.