KLAUSURLÖSUNGEN, 27.02.2019, 10:00 – 12:00

1. Die gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen X und Y ist in der Tabelle

$Y \backslash X$	-1	0	1
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

angegeben. Man bestimme $E[X|Y]$.
Antwort: $\frac{1}{9}$, wenn $Y = 1$ und $\frac{1}{11}$, wenn $Y = 2$.

Lösung. Da $\sigma(Y) = \{\emptyset, \{Y = 1\}, \{Y = 2\}, \Omega\}$, erhält man

$$E[X|Y] = E[X|Y = 1]\mathbb{1}_{\{Y=1\}} + E[X|Y = 2]\mathbb{1}_{\{Y=2\}},$$

wobei

$$E[X|Y = 1] = \frac{E[X\mathbb{1}_{\{Y=1\}}]}{P(Y = 1)} = \frac{-P(X = -1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1}{9},$$

$$E[X|Y = 2] = \frac{E[X\mathbb{1}_{\{Y=2\}}]}{P(Y = 2)} = \frac{-P(X = -1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{1}{11}.$$

□

2. Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(y - x) & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man bestimme $E[X|Y]$.
Antwort: $\frac{Y}{3}$.

Lösung. $E[X|Y] = \varphi(Y)$, wobei $\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f(x|y)dx$ und

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx}$$

die bedingte Dichte. Man berechnet

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_0^y 6(y - x)dx = 3y^2 & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich, für $0 < y < 1$,

$$\varphi(y) = \int_0^y x\frac{6(y - x)}{3y^2}\,dx = \frac{y}{3}$$

und $E[X|Y] = \frac{Y}{3}$.

□

3. Seien $\xi_1, \xi_2 \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[\xi_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$ für alle i. Seien
$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{und} \quad V_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\xi_i).$$
Beweisen Sie, dass $X_n = S_n^2 - V_n$ ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist.

Lösung. Da $E|X_n| \le E[S_n^2] + V_n \le (\sum_{i=1}^n E[\xi_i^2]^{\frac{1}{2}})^2 + V_n < \infty$, ist X_n integrierbar.

Da S_n $\mathscr{F}_n$-adaptiert ist, ist X_n auch $\mathscr{F}_n$-adaptiert.

Es bleibt also zu beweisen, dass $E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n$ f.s.. Es gilt fast sicher:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= E\left[(S_n + \xi_{n+1})^2 \,|\mathscr{F}_n\right] - V_{n+1} \\ &= E\left[S_n^2 + 2S_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 \,\middle|\mathscr{F}_n\right] - (V_n + \mathrm{Var}(\xi_{n+1})) \\ &= X_n + 2S_n \underbrace{E\left[\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n\right]}_{=E[\xi_{n+1}]=0} + \underbrace{E\left[\xi_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right]}_{=E[\xi_{n+1}^2]=\mathrm{Var}(\xi_{n+1})} - \mathrm{Var}(\xi_{n+1}) \\ &= X_n. \end{aligned}$$

□

4. Die Bewegung einer einzelnen Schachfigur auf einem Schachbrett wird als homogene Markov-Kette X_n mit Zustandsraum $\{a, \ldots, h\} \times \{1, \ldots, 8\}$ modelliert, sodass die Schachfigur in jedem Schritt aus allen möglichen Zügen gleichwahrscheinlich einen auswählt. Ohne die Übergangswahrscheinlichkeit explizit anzugeben, bestimmen Sie, ob die Markov-Kette X_n irreduzibel bzw. aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur um einen (a) König, (b) Läufer, (c) Springer handelt.

Antwort: (a) irreduzibel und aperiodisch, (b) nicht irreduzibel und aperiodisch, (c) irreduzibel und periodisch mit Periode 2.

Lösung. (a) Da der König von jeder Position aus jedes Feld des Schachbrettes erreichen kann, ist die Markov-Kette irreduzibel.

Da der König stets in 2 oder in 3 Zügen zu beliebiger Anfangsposition zurückkehren kann, ist die Periode jedes Feldes f gleich $\mathrm{ggT}\{n : p^n(f,f) > 0\} = 1$, also ist die Markov-Kette aperiodisch.

(b) Steht der Läufer auf einem schwarzen Feld, kann er keinen weißen Felder erreichen. Deshalb ist die Markov-Kette nicht irreduzibel.

Wie im Falle des Königs, kann auch der Läufer stets in 2 oder in 3 Zügen zu beliebiger Anfangsposition zurückkehren, also ist die Markov-Kette aperiodisch.

(c) Der Springer kann von jeder Anfangsposition aus jedes Feld erreichen. Folglich ist die Markov-Kette irreduzibel.

Steht der Springer auf einem schwarzen Feld, kann er nur auf ein weißes Feld springen, und umgekehrt. Deshalb, braucht er stets eine gerade Anzahl von Schritten um die Anfangsposition zu erreichen. Da er stets in 2 Zügen zurückkehren kann, ist die Periode jedes Feldes gleich 2.

□

5. Seien $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_i = 1) = p$ und $P(\xi_i = 0) = 1 - p$, wobei $p \in (0, 1)$. Man bestimme die invariante Verteilung für die Markov-Kette $X_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$.
Antwort: $\pi(0,0) = (1-p)^2$, $\pi(0,1) = \pi(1,0) = p(1-p)$, $\pi(1,1) = p^2$.

Lösung. Man kann diese Aufgabe lösen, indem man die Übergangsmatrix explizit aufschreibt

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$1-p$	p	0	0
$(0,1)$	0	0	$1-p$	p
$(1,0)$	$1-p$	p	0	0
$(0,0)$	0	0	$1-p$	p

und das System von 4 linearen Gleichungen für invariantes Maß löst.

Der einfachste Weg ist jedoch, die Definition der invarianten Verteilung π so zu interpretieren, dass die Aussage "X_n ist π-verteilt" die Aussage "X_{n+1} ist π-verteilt" impliziert, und zu merken, dass die Verteilung von X_n unabhängig von n ist:

$$\begin{aligned} P(X_n = (a,b)) &= P(\xi_n = a, \xi_{n+1} = b) = P(\xi_n = a)P(\xi_{n+1} = b) \\ &= P(\xi_1 = a)P(\xi_1 = b), \quad a, b \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Daher $\pi(a,b) = P(X_n = (a,b)) = P(\xi_1 = a)P(\xi_1 = b)$.

Eine andere Möglichkeit ist zu bemerken, dass X_n irreduzibel und aperiodisch ist. Somit besitzt sie die invariante Verteilung π und

$$\pi(a,b) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = (a,b)) = P(\xi_1 = a)P(\xi_1 = b), \quad a, b \in \{0,1\}.$$

□

6. Seien $\{\xi_{n,i}\}_{n\geq 0, i\geq 1}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und erzeugender Funktion $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k P(\xi_{0,1} = k)$. Sei

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}$$

der Verzweigungsprozess mit Nachkommen $\{\xi_{n,i}\}_{n\geq 0, i\geq 1}$.

Nimm an, dass es $\rho \in (0,1)$ mit $\varphi(\rho) = \rho$ gibt. Beweisen Sie, dass

(a) $X_n = \rho^{Z_n}$ ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_{k,i},\, k < n, i \geq 1)$ ist.

(b) X_n konvergiert fast sicher und in L^p für alle $p \geq 1$. Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $\rho = P(\exists\, n \geq 0 \,:\, Z_n = 0)$.

Lösung. (a) Da Z_n $\mathscr{F}_n$-adaptiert ist, so ist auch X_n. Da $\rho \in (0,1)$ und $Z_n \geq 0$, gilt $X_n \in (0,1]$. Insbesondere, ist X_n integrierbar. Weiterhin, gilt fast sicher:

$$E\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] = E\left[\rho^{\sum_{i=1}^{Z_n}\xi_{n,i}}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n=k\}}\, E\left[\rho^{\sum_{i=1}^{k}\xi_{n,i}}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right].$$

Da $\{\xi_{n,i}\}_{i\geq 1}$ unabhängig von $\mathscr{F}_n$ sind, gilt es

$$E\left[\rho^{\sum_{i=1}^{k}\xi_{n,i}}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right] = E\left[\rho^{\sum_{i=1}^{k}\xi_{n,i}}\right] = \left(E\left[\rho^{\xi_{0,1}}\right]\right)^k = \varphi(\rho)^k = \rho^k.$$

Folglich,

$$E\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z_n=k\}}\, \rho^k = \rho^{Z_n} = X_n.$$

(b) Wir erinnern uns daran, dass Z_n fast sicher gegen eine numerische Zufallsvariable mit Werten 0 oder $+\infty$ konvergiert (z.B. da alle $k \geq 1$ transient für Z_n sind). Somit konvergiert X_n fast sicher gegen die Zufallsvariable $X = \mathbb{1}_{\{\exists\, n: Z_n = 0\}}$. Da $X_n \in (0,1]$, folgt durch den Satz von der dominierten Konvergenz, dass X_n gegen X auch in L^p konvergiert. Insbesondere, konvergiert $E[X_n]$ gegen $E[X] = P(\exists\, n : Z_n = 0)$. Andererseits, da X_n ein Martingal ist, gilt es $E[X_n] = E[X_0] = \rho$.

□

7. Seien $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$ die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.

(a) Beweisen Sie, dass $X_n = |S_n|$ eine Markov-Kette ist.

(b) Beweisen Sie, dass X_n irreduzibel und nullrekurrent ist.

Lösung. (a) Wir sollen zeigen, dass für alle $x_0, \ldots, x_{n-1}, x \in \mathbb{Z}$,

$$P(X_n = x \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Wir werden tatsächlich beweisen, dass es Übergangswahrscheinlichkeit $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0,1]$ gibt, sodass für alle $x_0, \ldots, x_{n-1}, x \in \mathbb{Z}$,

$$P(X_n = x \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_{n-1}, x).$$

M.a.W. ist die Markov-Kette X_n homogen.

Beachte, dass $P(X_n = x \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = 0$, wenn $|x - x_{n-1}| \neq 1$.

Sei $|x - x_{n-1}| = 1$. Wir betrachten zunächst den Fall $x_{n-1} \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})& \\
&= P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1}) \\
&+ P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Für die erste Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}
P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1})& \\
&= P(S_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= P(\xi_n = x - x_{n-1}, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= P(\xi_n = x - x_{n-1})\, P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1}) \\
&= \tfrac{1}{2}\, P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Analog, gilt es für die zweite Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1})& \\
&= P(S_n = -x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1}) \\
&= P(\xi_n = -x + x_{n-1}, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1}) \\
&= P(\xi_n = -x + x_{n-1})\, P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1}) \\
&= \tfrac{1}{2}\, P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = -x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Folglich, gilt es für $|x - x_{n-1}| = 1$ und $x_{n-1} \neq 0$:

$$P(X_n = x \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{P(X_n = x, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})} = \frac{1}{2}.$$

Wenn $x_{n-1} = 0$, dann muss $x = 1$ sein. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = 0)& \\
&= P(|\xi_n| = 1, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = 0) \\
&= P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, S_{n-1} = 0).
\end{aligned}$$

Somit, $P(X_n = 1 \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = 0) = 1$.

Zusammenfassend, für alle nicht negativen ganzen Zahlen a und b gilt:

$$p(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |a - b| = 1, a \neq 0 \\ 1 & a = 0, b = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (*)$$

(b) Wir haben in Teil (a) bewiesen, dass X_n eine Markov-Kette auf $\{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeit $(*)$. Sie kann vom jeden Punkt x aus jeden anderen Punkt y in $|y - x|$ Schritten mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^{|y-x|}$ erreichen, also ist X_n irreduzibel.

Sei $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$. Beachte, dass $T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$. Da S_n die einfache symmetrische Irrfahrt ist, ist sie nullrekurrent, d.h. $P_0(T < \infty) = 1$ und $E_0[T] = \infty$. Dies impliziert aber, dass X_n auch nullrekurrent ist.

□