INHALTSVERZEICHNIS

1 Irrfahrten

Seien $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Wir definieren die σ-Algebren

$$\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \quad \mathscr{F}_\infty = \sigma(X_1, X_2, \ldots) = \sigma(\cup_{n\geq 1}\mathscr{F}_n). \tag{1.1}$$

Definition: Wenn $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige identisch verteilte (Abk. *i.i.d.*) Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ sind, dann heißt die durch

$$S_0 = x, \quad S_n = S_{n-1} + X_n$$

definierte Folge von Zufallsvariablen eine *Irrfahrt in* $\mathbb{R}^d$. Die Zufallsvariablen X_n heißen die *Zuwächsen* der Irrfahrt.

- Häufig wird $x = 0$ gewählt.
- Wenn $P(X_n = 1) = p$ und $P(X_n = -1) = 1 - p$, dann heißt S_n die *einfache symmetrische*, wenn $p = \frac{1}{2}$, bzw. *asymmetrische*, wenn $p \neq \frac{1}{2}$, *Irrfahrt in* $\mathbb{Z}$.

Definition: Sei $\mathscr{T}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Dann heißt $\mathscr{T} = \cap_{n\geq 1}\mathscr{T}_n$ *die asymptotische σ-Algebra der Folge X_n.*

- Man errinere sich an das 0-1 Gesetz von Kolmogorov von WT-I, dass $\mathscr{T}$ P-trivial ist für unabhängige $(X_n)_{n\geq 1}$, nähmlich für alle $A \in \mathscr{T}$, $P(A) \in \{0, 1\}$. z.B. $A = \{\exists \lim_n S_n\} \in \mathscr{T}$.

Definition: Die *austauschbare σ-Algebra der Folge* $(X_n)_{n\geq 1}$ ist eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}_\infty$ definiert durch

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{F}_\infty \, : \, \pi A = A \text{ für alle endliche Permutationen } \pi\}.$$

- $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine endliche Permutation, wenn sie eine Bijektion ist und $|\{i : \pi(i) \neq i\}| < \infty$.
- Jedes $A \in \mathscr{F}_\infty$ ist der Form $A = \{\omega \in \Omega \, : \, (X_n(\omega)_{n\geq 1} \in B\}$ für einiges $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}$. Dann definiert man $\pi A = \{\omega \, : \, (X_{\pi(n)}(\omega)_{n\geq 1} \in B\}$.

Beispiel: 1. Wenn $A \in \mathscr{T}$, dann $A \in \mathscr{E}$.

2. Für $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, sei $A = \{\omega : X_n(\omega) \in D \text{ für unendlich viele } n\}$. Dann im Allgemeinen, $A \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{T}$.

Satz 1 (0-1 Gesetz von Hewitt-Savage)**.** *Wenn $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. Zufallsvariablen sind, dann ist $\mathscr{E}$ P-trivial, d.h. $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathscr{E}$.*

Als Korollar dieses Satzes erhält man

Satz 2. *Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt in $\mathbb{R}$. Dann ist P-f.s. nur eines der folgenden 4 Verhaltensweisen möglich:*

1. $S_n = S_0$ *für alle* $n \geq 0$
2. $\lim_n S_n = +\infty$
3. $\lim_n S_n = -\infty$
4. $\liminf_n S_n = -\infty$, $\limsup_n S_n = +\infty$.

1.1 Stoppzeiten

Definition: Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum. Jede monoton wachsende Folge von Tei-σ-Algebren $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ von $\mathscr{F}$ heißt eine *Filtrierung.*

- Meistens werden wir als $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ die natürliche Filtrierung der Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$ von (1.1) betrachten. Die nächste Definition ist jedoch für die beliebige Filtrierung sinnvoll.

Definition: Eine Zufallsvariable N mit Werten in $\{0, 1, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ heißt *Stoppzeit bezüglich der Filtrierung* $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, wenn

$$\{N = n\} \in \mathscr{F}_n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

- N ist eine Stoppzeit bezüglich $\mathscr{F}_n$ genau dann, wenn $\{N > n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \geq 0$.

Beispiel: 1. $N = n_0$ P-f.s. ist eine Stoppzeit bezüglich jeder Filtrierung

2. Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, $H_A = \inf\{n \geq 0 : S_n \in A\}$, die erste Besuchszeit von S_n in A ist eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung von (1.1)
3. $N = \sup\{n \geq 1 : X_n \geq 0\}$ ist keine Stoppzeit
4. Seien N_1, N_2 Stoppzeiten, dann sind $N_1 \wedge N_2 = \min(N_1, N_2)$, $N_1 \vee N_2 = \max(N_1, N_2)$, $N_1 + N_2$ auch Stoppzeiten. Besonders wichtig für diesen Kurs ist die Stoppzeit $N_1 \wedge n$.

Satz 3 (Waldsche Identität / die Formel von Wald)**.** *Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. Zufallsvariablen und N eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung* (1.1). *Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt mit $S_0 = 0$. Wenn $E[|X_1|] < \infty$ und $E[N] < \infty$, dann gilt $E[|S_N|] < \infty$ und*

$$E[S_N] = E[X_1]\, E[N].$$

Beispiel: Seien $0 < x < a$, $x, a \in \mathbb{Z}$, S_n die einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}$ mit $S_0 = x$ und $N = \inf\{n \geq 0 : S_n \notin (0, a)\} = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ oder } S_n = a\}$. Dann $E[N] < \infty$ und $E[S_N] = x + E[X_1]\, E[N] = x$. Andererseits, $E[S_N] = 0P(S_N = 0) + aP(S_N = a) = aP(S_N = a)$. Folglich,

$$P(S_N = a) = \frac{x}{a}, \quad P(S_N = 0) = \frac{a - x}{a}.$$

Definition: Sei N eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. Die *$\sigma$-Algebra der N-Vergangenheit* ist definiert durch

$$\mathscr{F}_N = \{A \in \mathscr{F} \,:\, A \cap \{N = n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Satz 4 (Die starke Markov-Eigenschaft der Irrfahrt)**.** *Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung ν und N eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung* (1.1) *mit $P(N < \infty) > 0$. Dann*

1. *sind die Zufallsvariablen $(X_{N+n})_{n\geq 1}$ auf $\{N < \infty\}$ unabhängig ν-verteilt und unabhängig von $\mathscr{F}_N$,*
   - *d.h. auf dem W-Raum $(\{N < \infty\}, \mathscr{F} \cap \{N < \infty\}, Q(\cdot) = \frac{P(\cdot \cap \{N<\infty\})}{P(N\infty)})$ sind die Zufallsvariablen $(X_{N+n})_{n\geq 1}$ unabhängig ν-verteilt und unabhängig von $\mathscr{F}_N \cap \{N < \infty\}$.*
2. *ist $(S_{N+n} - S_N)_{n\geq 0}$ unabhängig von $\mathscr{F}_N$ und gleichverteilt mit $(S_n)_{n\geq 0}$ (hier $S_0 = 0$).*

Beispiel: Sei S_n eine Irrfahrt in $\mathbb{R}^d$ mit $S_0 = 0$. Seien $T_0^0 = 0$, $T_0^k = \inf\{n > T_0^{k-1} : S_n = 0\}$ die aufeinanderfolgende Besuchszeiten zu 0. Dann $P(T_0^k < \infty) = P(T_0^1 < \infty)^k$.

Satz 5 (Satz von Pólya)**.** *Sei S_n eine Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$ mit $P(X_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$ (die einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$). Dann $P(T_0^1 < \infty) = 1$ wenn $d \in \{1, 2\}$ (die Irrfahrt ist* rekurrent*), und $P(T_0^1 < \infty) < 1$ wenn $d \geq 3$ (die Irrfahrt ist* transient*).*

2 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum. Wenn $\mathscr{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$ und X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{F})$, dann sagen wir, dass X $\mathscr{G}$-messbar und schreiben $X \in \mathscr{G}$, wenn $X^{-1}(B) \in \mathscr{G}$ für alle $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Definition: Für Ereignisse $A, B \in \mathscr{F}$ mit $P(B) > 0$, ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A, vorausgesetzt B* (oder auch *under der Bedingung B*) definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- Wenn $P(B) = 0$, setzen wir $P(A|B) = 0$.

Proposition 6. *1. (*Multiplikationssatz*) Für $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ gilt*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

*2. (*Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit*) Seien $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ und $B_1, \ldots, B_N \in \mathscr{F}$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $\cup_{i=1}^N B_i = \Omega$. Dann gilt für jedes $A \in \mathscr{F}$,*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)P(B_i).$$

Definition: Seien $B \in \mathscr{F}$ mit $P(B) > 0$ und X eine integrierbare Zufallsvariable. Der *bedingte Erwartungswert von X, vorausgesetzt B* ist definiert durch

$$E[X|B] = \frac{E[X\,\mathbb{1}_B]}{P(B)}.$$

- Wenn $P(B) = 0$, setzen wir $E[X|B] = 0$.

Diese elementare Begriffe von bedingten Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert sind oft nicht ausreichend. Der allgemeine abstrakte Begriff des bedingten Erwartungswertes gegeben eine Teil-σ-Algebra ist durch den folgenden Satz eingeführt.

Satz 7. *Seien $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, X eine integrierbare Zufallsvariable und $\mathscr{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$. Dann existiert eine Zufallsvariable Z, so dass*

1. *Z ist integrierbar,*
2. *$Z \in \mathscr{G}$,*

3. für alle $C \in \mathscr{G}$,

$$E[X\,\mathbb{1}_C] = E[Z\,\mathbb{1}_C].$$

Die Zufallsvariable Z ist eindeutig bis auf P-Null Äquivalenz durch (1)-(3) bestimmt. Sie heißt der bedingte Erwartungswert von X gegeben $\mathscr{G}$ *und wird mit*

$$Z = E[X|\mathscr{G}]$$

bezeichnet.

- *Jede Zufallsvariable Z die (1)-(3) erfüllt heißt die* Version *vom bedingten Erwartungswert von X gegeben $\mathscr{G}$.*
- *Falls $X \geq 0$, dann gilt $Z \geq 0$ P-f.s.*
- *Wenn $\mathscr{G}$ die σ-Algebra erzeugt von Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ ist, dann schreibt man $E[X|Y_1, \ldots, Y_n]$ für $E[X|\mathscr{G}]$.*
- *Für $A \in \mathscr{F}$ wird die* bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben $\mathscr{G}$ *durch*

$$P(A|\mathscr{G}) = E[\mathbb{1}_A|\mathscr{G}]$$

definiert. Wenn $\mathscr{G}$ erzeugt von Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ ist, dann schreibt man auch $P(A|Y_1, \ldots, Y_n)$ für $P(A|\mathscr{G})$.

Beispiel: 1. Seien $1 \leq N \leq \infty$ und $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(A_i) > 0$ für alle i und $\cup_{i=1}^N A_i = \Omega$. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und $\mathscr{G} = \sigma(A_i, 1 \leq i \leq N)$. Dann gilt

$$E[X|\mathscr{G}] = \sum_{i=1}^{N} E[X|A_i]\,\mathbb{1}_{A_i}.$$

- Insbesondere, wenn $N = 1$, $A_1 = \Omega$, dann $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$.

2. Seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x, y) > 0$ und $E[|X|] < \infty$. Die bedingte Dichte von X gegeben $Y = y$ ist

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x', y)dx'}.$$

Dann gilt

$$E[X|Y] = \varphi(Y), \quad \text{wobei } \varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f(x|y) dx.$$

3. Wenn X unabhängig von $\mathscr{G}$ ist, dann $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$ f.s.
4. Wenn $X \in \mathscr{G}$, dann $E[X|\mathscr{G}] = X$ f.s.

Proposition 8 (Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes)**.** *1. (Linearität) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und integrierbaren Zufallsvariablen X, Y gilt*

$$E[aX + bY|\mathscr{G}] = aE[X|\mathscr{G}] + bE[Y|\mathscr{G}] \quad \textit{f.s.}$$

2. (Jensen'sche Ungleichung) Für integrierbare Zufallsvariable X und konvexe Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $E[|\varphi(X)|] < \infty$ gilt

$$\varphi(E[X|\mathscr{G}]) \leq E[\varphi(X)|\mathscr{G}] \quad \textit{f.s.}$$

- *Insbes., wenn $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ für $1 \le p \le \infty$, dann $|E[X|\mathscr{G}]|^p \le E[|X|^p|\mathscr{G}]$ f.s. und $E[X|\mathscr{G}] \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$.*

3. *Sei X integrierbare Zufallsvariable, $Y \in \mathscr{G}$ mit $E[|XY|] < \infty$. Dann gilt*

$$E[XY|\mathscr{G}] = E[X|\mathscr{G}]\,Y \quad \textit{f.s.}$$

- *Insbes., wenn $Y \in \mathscr{G}$ itegrierbar ist, dann $E[Y|\mathscr{G}] = Y$ f.s.*

4. *Wenn X, Y unabhängige Zufallsvariablen und $E[|f(X,Y)|] < \infty$, dann $E[f(X,Y)|Y] = g(Y)$ f.s., wobei $g(y) = E[f(X,y)]$.*
5. *Sei $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Dann ist $E[X|\mathscr{G}]$ die orthogonale Projektion von X auf den Teil-Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathscr{G}, P)$ von $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Mit anderen Worten, das Minimum von $E[(X-Z)^2]$ über $Z \in L^2(\Omega, \mathscr{G}, P)$ wird bei $Z = E[X|\mathscr{G}]$ erreicht.*
6. *(Tower property) Seien $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ Teil-σ-Algebren von $\mathscr{F}$ und X eine integrierbare Zufallsvariable. Dann gilt*

   (a)
$$E\left[E[X|\mathscr{G}_2]\,|\mathscr{G}_1\right] = E[X|\mathscr{G}_1] \quad P\textit{-f.s.}$$

   (b)
$$E\left[E[X|\mathscr{G}_1]\,|\mathscr{G}_2\right] = E[X|\mathscr{G}_1] \quad P\textit{-f.s.}$$

3 Martingale

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum und $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots$ eine Filtrierung.

Definition: Eine Folge $(X_n)_{n\ge 0}$ von Zufallsvariablen heißt *$\mathscr{F}_n$-adaptiert*, wenn $X_n \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \ge 0$.

Definition: Eine $\mathscr{F}_n$-adaptierte Folge $(X_n)_{n\ge 0}$ von integrierbaren Zufallsvariablen heißt

1. *Martingal (bezüglich $\mathscr{F}_n$)*, wenn

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n \quad P\text{-f.s. für alle } n \ge 0.$$

2. *Submartingal (bezüglich $\mathscr{F}_n$)*, wenn

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \ge X_n \quad P\text{-f.s. für alle } n \ge 0.$$

3. *Supermartingal (bezüglich $\mathscr{F}_n$)*, wenn

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \le X_n \quad P\text{-f.s. für alle } n \ge 0.$$

- Falls X_n ein (Sub-/Super-)Martingal bezüglich $\mathscr{F}_n$, dann ist X_n auch (Sub-/Super-)Martingal bezüglich der natürlichen Filtrierung $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Wenn die Filtrierung nicht explizit angegeben ist, nehmen wir immer $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ an.

Beispiel: 1. Eine Irrfahrt $S_n = x + \sum_{i=1}^n \xi_i$ in $\mathbb{R}$ mit $E[\xi_i] = 0$ ist ein Martingal.

2. Wenn $E[\xi_i^2] = \sigma^2 < \infty$ oben, dann ist $M_n = S_n^2 - \sigma^2 n$ auch ein Martingal.

3. Sei S_n die einfache asymmetrische Irrfahrt. Dann ist $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ ein Martingal.

Proposition 9 (Eigenschaften von Martingale). *1. X_n ist ein Submartingal genau dann, wenn $-X_n$ ein Supermartingal ist.*

2. Wenn X_n, Y_n Submartingals sind, dann ist $X_n + Y_n$ ein Submartingal.

3. X_n ist ein Submartingal bezüglich $\mathscr{F}_n$ genau dann, wenn

$$E[X_n|\mathscr{F}_m] \geq X_m \quad P\text{-f.s., für alle } 0 \leq m \leq n.$$

4. Seien X_n ein $\mathscr{F}_n$-Martingal und φ eine konvexe Funktion mit $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$ für $n \geq 0$, dann ist $\varphi(X_n)$ ein $\mathscr{F}_n$-Submartingal.

- *Insbes., wenn X_n ein Martingal in $L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ für $1 \leq p < \infty$ ist, dann ist $|X_n|^p$ ein Submartingal.*
- *Wenn φ eine konvexe* monoton wachsende *Funktion mit $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$, dann ist $\varphi(X_n)$ ein Submartingal auch wenn X_n ein Submartingal ist. (Beachte, dass $X_n = -\frac{1}{n}$ ein Submartingal und $X_n^2 = \frac{1}{n^2}$ ein Supermartingal ist. Hier ist $\varphi(x) = x^2$ nicht monoton wachsend.)*

Definition: Eine Folge von Zufallsvariablen H_n heißt *previsibel bezüglich der Filtrierung* $\mathscr{F}_n$, wenn $H_n \in \mathscr{F}_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

- Sei N eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n$. Dann ist $H_n = \mathbb{1}_{\{N \geq n\}}$ previsibel bezüglich $\mathscr{F}_n$.

Satz 10. *Seien X_n ein (Sub- bzw. Super-)Martingal und $H_n \geq 0$ previsibel bezüglich $\mathscr{F}_n$ und beschränkt für jedes n. Dann ist die Folge*

$$(H \cdot X)_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \sum_{m=1}^n H_m(X_m - X_{m-1}) & n \geq 1 \end{cases}$$

ein (Sub- bzw. Super-)Martingal.

- *Insbes., wenn N eine Stoppzeit bezüglich $\mathscr{F}_n$ ist, dann ist $(X_{N \wedge n})_{n \geq 0}$ ein (Sub- bzw. Super-)Martingal.*

Satz 11 (Zerlegung von Doob). *X_n ist ein $\mathscr{F}_n$-Submartingal genau dann, wenn $X_n = M_n + A_n$, wobei M_n ein $\mathscr{F}_n$-Martingal und $0 \leq A_0 \leq A_1 \leq \ldots$ $\mathscr{F}_n$-previsibel und integrierbar ist. M_n und A_n sind bis auf P-Null Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

3.1 Fast sicher Konvergenz von Martingale

3.1.1 Aufkreuzungsungleichung

Seien $a < b$ und $(X_n)_{n \geq 0}$ ein Submartingal bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n$. Wir definieren eine aufsteigende Folge von $\mathscr{F}_n$-Stoppzeiten:

$$\begin{aligned} N_1 &= \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n \leq a\}, \\ N_2 &= \inf\{n > N_1 \,:\, X_n \geq b\}, \\ &\ldots \\ N_{2k-1} &= \inf\{n > N_{2k-2} \,:\, X_n \leq a\} \\ N_{2k} &= \inf\{n > N_{2k-1} \,:\, X_n \geq b\}. \end{aligned}$$

- Hier nehmen wir an, dass $N_1 = +\infty$, wenn $X_n > a$ für alle n, $N_2 = +\infty$, wenn $N_1 = +\infty$ oder $N_1 < +\infty$ und $X_n < b$ für alle $n > N_1$, usw.

Satz 12. *Seien $a < b$ und $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Submartingal. Sei*

$$U_n^{a,b} = \sup\{k \geq 1 \,:\, N_{2k} \leq n\} \quad (\sup \emptyset = 0)$$

die Anzahl der Durchkreuzungen von $[a,b]$ bis zum Zeitpunkt n. Dann gilt

$$E\left[U_n^{a,b}\right] \leq \frac{E\left[(X_n - a)^+\right] - E\left[(X_0 - a)^+\right]}{b-a}.$$

Satz 13 (Martingalkonvergenzsatz)**.** *Sei X_n ein Submartingal mit $\sup_{n\geq 0} E\left[X_n^+\right] < \infty$. Dann konvergiert X_n P-f.s. gegen einer integrierbaren Zufallsvariable.*

- Insbes., wenn $X_n \geq 0$ ein Supermartingal, dann konvergiert X_n P-f.s. gegen eine Zufallsvariable $X \geq 0$ mit $E[X] \leq E[X_0]$.
- Im Allgemeinen sind die Voraussetzungen des Satzes für L^1-Konvergenz von X_n nicht ausreichend, z.B. wenn S_n die einfache asymmetrische Irrfahrt ist, dann konvergiert $X_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ P-f.s. gegen 0 und $E[X_n] = 1 \not\to 0$.

3.2 Konvergenz von Martingale in L^p, $p > 1$

3.2.1 Ungleichungen von Doob

Satz 14. *Seien X_n ein Submartingal und $\lambda > 0$. Dann gilt*

$$P(\max_{0\leq m\leq n} X_m \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[X_n^+\right].$$

- Wenn X_n ein Martingal ist, dann ist $|X_n|$ ein Submartingal. Deshalb $P(\max_{0\leq m\leq n} |X_m| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[|X_n|\right]$.

Satz 15 (L^p-maximale Ungleichung)**.** *Seien X_n ein Submartingal und $p \in (1,\infty)$. Dann gilt*

$$\|\max_{0\leq m\leq n} X_m^+\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_n^+\|_p$$

Insbesondere, wenn X_n ein Martingal mit $\sup_{n\geq 0} E[|X_n|^p] < \infty$ für $1 < p < \infty$ ist, dann gilt

$$\|\sup_{n\geq 0} |X_n|\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{n\geq 0} \|X_n\|_p.$$

- Wenn $X_n \in L^p$ für $1 < p < \infty$, dann $\max_{0\leq m\leq n} X_m^+ \in L^p$.

Satz 16 (Konvergenz in L^p, $p > 1$)**.** *Seien X_n ein $\mathscr{F}_n$-Martingal und $1 < p < \infty$. Dann sind äquivalent:*

1. $\sup_{n\geq 0} \|X_n\|_p < \infty$
2. $E\left[\sup_{n\geq 0} |X_n|^p\right] < \infty$
3. *X_n konvergiert in L^p*
4. *Es gibt $X \in L^p$, so dass $X_n = E[X|\mathscr{F}_n]$ für $n \geq 0$.*

Satz 17. *Seien $1 < p < \infty$, $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_n$ eine Filtriefung, und $X_n = E[X|\mathscr{F}_n]$. Dann konvergiert X_n gegen $X_\infty = E[X|\mathscr{F}_\infty]$ P-f.s. und in L^p, wobei $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathscr{F}_n)$.*

Insbesondere, wenn $X \in \mathscr{F}_\infty$, dann $X_\infty = X$ P-f.s.

- (0-1 Gesetz von Levy) Sei $\mathscr{F}_n$ eine Filtrierung mit $\sigma(\cup_{n\geq 0}\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}$. Für alle $A \in \mathscr{F}$ gilt $E[\mathbb{1}_A|\mathscr{F}_n] \to \mathbb{1}_A$ P-f.s.

3.3 Konvergenz von Martingale in L^1

Im Gegensatz zur L^p-Konvergenz für $p > 1$, gibt es Martingale die konvergieren in L^1 und trotzdem $E[\sup |X_n|] = \infty$. Die korrekte Bedingung für die L^1-Konvergenz wird in der nächsten Definition eingeführt.

Definition: Eine Familie von Zufallsvariablen X_i, $i \in I$, heißt *gleichmäßig integrierbar*, oder auch *gleichgradig integrierbar*, wenn

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} E\left[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>M\}}\right] = 0.$$

- Falls $(X_i)_{i\in I}$ gleichmäßig integrierbar sind, dann $\sup_{i\in I} E[|X_i|] < \infty$.
- Falls $|X_i| \leq Y$ für alle $i \in I$ und eine integrierbare Zufallsvariable Y, dann sind X_i gleichmäßig integrierbar. Insbes., wenn $E[\sup_i |X_i|] < \infty$, dann sind X_i gleichmäßig itegrierbar. (Das Gegenteil ist aber im Allgemeinen falsch.)
- Sei $\varphi \geq 0$ mit $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$, z.B. $\varphi(x) = x^p$, $p > 1$, oder $\varphi(x) = x \ln^+ x$. Falls $\sup_i E[\varphi(|X_i|)] < \infty$, dann sind X_i gleichmäßig integrierbar.

Beispiel: Sei X integrierbare Zufallsvariable in $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Dann ist die Familie

$$\{E[X|\mathscr{G}] \,:\, \mathscr{G} \text{ ist eine Teil-}\sigma\text{-Algebra von } \mathscr{F}\}\,.$$

gleichmäßig integrierbar.

Satz 18. *Seien X_n Zufallsvariablen, die gegen Zufallsvariable X in Wahrscheinlichkeit konvergieren. Dann sind äquivalent:*

1. *X_n sind gleichmäßig integrierbar*
2. *X_n konvergiert gegen X in L^1*
3. *$E[|X_n|] < \infty$, $E[|X|] < \infty$, und $E[|X_n|] \to E[|X|]$.*

Satz 19 (Konvergenz von Submartingale in L^1)**.** *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Submartingal. Dann sind äquivalent:*

1. *X_n sind gleichmäßig integrierbar*
2. *X_n konvergiert P-f.s. und in L^1*
3. *X_n konvergiert in L^1.*

Satz 20 (Konvergenz von Martingale in L^1)**.** *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein $\mathscr{F}_n$-Martingal. Dann sind äquivalent:*

1. *X_n sind gleichmäßig integrierbar*
2. *X_n konvergiert P-f.s. und in L^1*
3. *X_n konvergiert in L^1*
4. *Es gibt $X \in L^1$, so dass $X_n = E[X|\mathscr{F}_n]$ für $n \geq 0$.*

Satz 21. *Seien $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_n$ eine Filtriefung, und $X_n = E[X|\mathscr{F}_n]$. Dann konvergiert X_n gegen $X_\infty = E[X|\mathscr{F}_\infty]$ P-f.s. und in L^1, wobei $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathscr{F}_n)$.*

Insbesondere, wenn $X \in \mathscr{F}_\infty$, dann $X_\infty = X$ P-f.s.

3.4 Verzweigungsprozess

Seien ν ein W-Maß auf $\{0,1,2,\ldots\}$ mit $m=\sum_{k=0}^{\infty} k\nu(k)<\infty$ und $(\xi_i^n)_{i,n\geq 1}$ unabhängige ν-verteilte Zufallsvariablen (die Anzahl der Nachkommen des Teilchens i von der Generation $n-1$).

Die *Galton-Watson Kette* oder auch der *Verzweigungsprozess* ist die Folge von Zufallsvariablen definiert durch

$$Z_0=1, \quad Z_{n+1}=\begin{cases} \xi_1^{n+1}+\ldots+\xi_{Z_n}^{n+1} & Z_n>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Z_n ist die Anzahl der Teilchen in der n-ten Generation). Um Trivialitäten zu vermeiden, nehmen wir an, dass

$$\nu(0)\neq 1 \quad \text{und} \quad \nu(1)\neq 1.$$

Proposition 22. *Seien $\mathscr{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_i^k,\, 1\leq k\leq n,\, i\geq 1)$. Dann ist $M_n=\frac{Z_n}{m^n}$ ein $\mathscr{F}_n$-Martingal. Insbesondere, konvergiert M_n gegen eine Zufallsvariable $M_\infty\geq 0$ mit $E[M_\infty]\leq 1$.*

- *Wenn $0<m<1$ (*subkritischer Fall*) oder $m=1$ (*kritischer Fall*), dann $M_\infty=0$ P-f.s.*
- *Wenn $m>1$ und $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\nu(k)<\infty$, dann $P(M_\infty=0)=P(\exists\, n: Z_n=0)<1$.*
  - *In der Tat, $M_\infty=0$ P-f.s. genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} k\ln k\nu(k)=+\infty$ (Satz von Kesten und Stigum). In diesem Fall, $P(M_\infty=0)=P(\exists\, n: Z_n=0)$.*

Proposition 23. *Sei $\varphi(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k\nu(k)$, $s\in[0,1]$. Wenn $m>1$, dann besitzt die Gleichung $\varphi(\rho)=\rho$ die eindeutige Lösung in $[0,1)$. Weiterhin, $\rho=P(\exists\, n: Z_n=0)$ die* Aussterbewahrscheinlichkeit*.*

3.5 Azuma-Höffding-Ungleichung

Satz 24. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal mit $|X_i-X_{i-1}|\leq c_i$ f.s. für alle i. Dann gilt für alle $x\geq 0$*

$$\begin{aligned} P(X_n-X_0\geq x) &\leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) \\ P(X_n-X_0\leq -x) &\leq \exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right). \end{aligned}$$

Insbesondere,

$$P(|X_n-X_0|\geq x)\leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

- Wenn X_0 f.s. konstant ist, dann $X_0=E[X_n]$. Der Satz von Azuma-Höffding gibt also die Obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit einer großen Abweichung von X_n von seinem Mittelwert an.

4 Markov-Ketten

In diesem Teil werden die folgenden Notationen verwendet:

- $\Omega \neq \emptyset$ ist die Ergebnismenge, $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra auf Ω, P ein W-Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$.
- Ein Messbarer Raum $(S, \mathscr{S})$ wird *Zustandsraum* genannt.
- $X = (X_n)_{n \geq 0}$ ist eine Folge von S-wertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F})$.

Definition: Eine Abbildung $p : S \times \mathscr{S} \to [0, 1]$ heißt *stochastischer Kern auf* S, wenn

1. für alle $x \in S$, $p(x, \cdot) : \mathscr{S} \to [0, 1]$ ein W-Maß auf $(S, \mathscr{S})$ ist,
2. für alle $A \in \mathscr{S}$, $p(\cdot, A) : S \to [0, 1]$ messbar ist.

- Das Integral einer Funktion f bezüglich des Maßes $p(x, \cdot)$ wird mit $\int_S f(y)p(x, dy)$ bezeichnet.
- Wenn S höchstens abzählbar ist, kann man eine *stochastische Matrix auf* S definieren als eine Abbildung $p : S \times S \to [0, 1]$ mit $\sum_{j \in S} p(i, j) = 1$ für alle $i \in S$. Dann ist die Abbildung $p : S \times \mathscr{P}(S) \to [0, 1]$ definiert durch $p(i, A) = \sum_{j \in A} p(i, j)$ ein stochastischer Kern auf S.

Definition: Seien p_n, $n \geq 0$, stochastische Kerne auf S. Die Folge $(X_n)_{n \geq 0}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißt *Markov-Kette auf dem Zustandsraum* $(S, \mathscr{S})$ *mit Übergangswahrscheinlichketen* $(p_n)_{n \geq 0}$, wenn für alle $n \geq 0$ und $A \in \mathscr{S}$,

$$P(X_{n+1} \in A \,|\, X_0, \ldots, X_n) = p_n(X_n, A) \quad P\text{-f.s.}$$

Sind die Übergangswahrscheinlichketen p_n unabhängig von n, also $p_n = p$ für alle $n \geq 0$, so heißt die Markov-Kette *homogen*.

- Irrfahrt in $\mathbb{R}^d$ ist eine homogene Markov-Kette. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. $\mathbb{R}^d$-wertige ν-verteilte Zufallsvariablen, dann ist die Folge $X_n = x_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$ eine homogene Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichket $p(x, A) = \nu(A - x)$.
- Verzweigungsprozess $(Z_n)_{n \geq 0}$ ist eine homogene Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Übergangswahrscheinlichket $p(i, j) = P(\sum_{k=1}^i \xi_k = j)$ $(= P(Z_{n+1} = j | Z_n = i))$, wobei ξ_i i.i.d. nicht-negative $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariablen (Anzahl der Nachkommen) sind.

4.1 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 25 (Existenz)**.** *Sei S ein vollständiger separabler metrischer Raum (Polnischer Raum). Sei p ein stochastischer Kern auf $(S, \mathscr{S})$. Dann existiert ein messbarer Raum $(\Omega, \mathscr{F})$, eine Folge von S-wertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ und W-Maßen $(P_x)_{x \in S}$ so dass*

1. *für jedes $B \in \mathscr{F}$, $P_\cdot(B) : S \to [0, 1]$ messbar ist*
2. *für jedes $x \in S$ ist $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichket p in W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P_x)$ und $P_x(X_0 = x) = 1$.*

Die W-Maßen $(P_x)_{x \in S}$ nennt man *die Verteilungen von der Markov-Kette* $(X_n)_{n \geq 0}$. Das Integral bezüglich P_x wird mit E_x bezeichnet ($E_x[F] = \int_\Omega F(\omega) dP_x(\omega)$).

- Die kanonische Wahl ist $\Omega = S^{\{0,1,\ldots\}}$, $\mathscr{F} = \mathscr{S}^{\{0,1,\ldots\}}$, $X_n : \Omega \to S$, $X_n(\omega) = \omega(n)$ (die n-te Koordinate).

- Da die W-Maßen $P_{x,n}$ auf $(S^{\{0,1,\dots,n\}}, \mathscr{S}^{\{0,1,\dots,n\}})$ definiert durch

$$P_{x,n}(B_0 \times \ldots \times B_n) = \mathbb{1}_{x \in B_0} \int_{B_1} p(x, dx_1) \ldots \int_{B_n} p(x_{n-1}, dx_n), \quad B_0, \ldots, B_n \in \mathscr{S},$$

für jedes $x \in S$ eine *konsistente Familie von W-Maßen* bilden, folgt es vom Kolmogorovschen Erweiterungssatz, dass existiert eindeutinges W-Maß P_x auf $(\Omega, \mathscr{F})$, so dass

$$P_x(X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n) = P_{x,n}(B_0 \times \ldots \times B_n), \quad \text{für alle } n \geq 1,\ B_0, \ldots, B_n \in \mathscr{S}.$$

Dann ist $(X_n)_{n \geq 0}$ eine gewünschte Markov-Kette.

- Wenn μ ein W-Maß auf $(S, \mathscr{S})$ ist, sei $P_\mu(\cdot) = \int_S P_x(\cdot) d\mu(x)$. Dann ist $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichket p auf dem W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P_\mu)$. In diesem Fall, heißt μ die *Anfangsverteilung der Markov-Kette.*

- In der Tat, gilt der Existenzsatz für beliebigen Zustandsraum $(S, \mathscr{S})$, c.f. Satz von Ionescu-Tulcea.

Satz 26 (Eindeutigkeit)**.** *Seien $(S, \mathscr{S})$ ein messbarer Raum, p ein stochastischer Kern auf S und μ ein W-Maß auf $(S, \mathscr{S})$. Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette auf einem W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit dem Zustandsraum S, Übergangswahrscheinlichket p und Anfangsverteilung μ. Dann gilt für alle $n \geq 0$, $B_0, B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{S}$,*

$$P(X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n) = \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p(x_0, dx_1) \ldots \int_{B_n} p(x_{n-1}, dx_n). \tag{4.1}$$

Insbesondere, ist die Verteilung der Markov-Kette eindeutig durch p und μ bestimmt.

- Wenn S höchstens abzählbar ist und $p : S \times S \to [0,1]$ eine stochastische Matrix ist, lautet (4.1) mit der Wahl $B_i = \{x_i\}$ wie folgt:
$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0) p(x_0, x_1) \ldots p(x_{n-1}, x_n).$$

4.2 Markov Eigenschaften

Satz 27 (Markov Eigenschaft)**.** *Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichket p und Verteilungen $(P_x)_{x \in S}$. Sei $F : S^{\{0,1,\ldots\}} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in S$ und $n \geq 0$*

$$E_x\left[F\left((X_{n+m})_{m \geq 0}\right) \mid X_0, \ldots, X_n\right] = g(X_n) \quad P_x\text{-f.s.},$$

wobei $g(y) = E_y\left[F\left((X_m)_{m \geq 0}\right)\right]$.

- Wenn $F(s) = \mathbb{1}_{B_0 \times \ldots \times B_k \times S^{\{k+1, k+2, \ldots\}}}(s)$, dann lautet die Markov Eingenschaft wie folgt:

$$P_x\left(X_n \in B_0, X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_{n+k} \in B_k \,|\, X_0, \ldots, X_n\right) = g(X_n),$$

wobei $g(y) = P_y(X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k)$. Zusammen mit der Tower property des bedingten Erwartungswertes, bekommt man

$$P_x(X_0 \in C_0, \ldots, X_{n+k} \in C_{n+k}) = E_x\left[\mathbb{1}_{\{X_0 \in C_0, \ldots, X_n \in C_n\}} P_{X_n}(X_1 \in C_{n+1}, \ldots, X_k \in C_{n+k})\right].$$

Insbes., wenn S höchstens abzählbar ist, dann gilt

$$P_x(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n+k} = x_{n+k}) = P_x(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)\, P_{x_n}(X_1 = x_{n+1}, \ldots, X_k = x_{n+k}).$$

Dies impliziert sofort die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung:* Für alle $x, z \in S$

$$P_x(X_{n+m} = z) = \sum_{y \in S} P_x(X_n = y)\, P_y(X_m = z).$$

Satz 28 (Die starke Markov Eigenschaft). *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichket p und Verteilungen $(P_x)_{x\in S}$. Sei $F : S^{\{0,1,\dots\}} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion. Sei $N : \omega \to \{0,1,\dots\} \cup \{+\infty\}$ eine Stoppzeit bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0,\dots,X_n)$. Dann gilt für alle $x \in S$*

$$E_x \left[F\left((X_{N+m})_{m\geq 0}\right) \mid \mathscr{F}_N \right] \mathbb{1}_{\{N<\infty\}} = g(X_N) \mathbb{1}_{\{N<\infty\}} \quad P_x\text{-f.s.},$$

wobei $g(y) = E_y \left[F\left((X_m)_{m\geq 0}\right)\right]$ und $\mathscr{F}_N$ die σ-Algebra der N-Vergangenheit.

- Für $A \in \mathscr{S}$, definiere $H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Es folgt von der starken Markov Eigenschaft (bei $N = H_A$) und der Tower property, dass

$$P_x\left(\exists\, n \geq H_A \text{ s.t. } X_n \in B\right) = E_x \left[\mathbb{1}_{\{H_A<\infty\}} P_{X_{H_A}}(H_B < \infty) \right].$$

  Insbes., wenn S höchstens abzählbar ist und $A = \{y\}$, dann gilt

$$P_x\left(\exists\, n \geq H_A \text{ s.t. } X_n \in B\right) = P_x(H_y < \infty)\, P_y(H_B < \infty).$$

4.3 Disktete Markov-Ketten

Eine Markov-Kette auf dem höchstens abzählbaren Zustandsraum heißt *diskrete Markov-Kette*. In diesem Abschnitt untersuchen wir einige Eigenschaften der diskreten Markov-Ketten. Wir werden die folgenen Notationen verwenden:

- Zustandsraum: höchstens abzählbare Menge S
- Übergangsmatrix: $p : S \times S \to [0,1]$ mit $\sum_{j\in S} p(i,j) = 1$ für alle $i \in S$
- Markov-Kette $X = (X_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangsmatrix p und Verteilungen $(P_x)_{x\in S}$:

$$P_x(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p(x,x_1)\dots p(x_{n-1},x_n), \quad x, x_1, \dots, x_n \in S$$

- *n-Schritt-Übergangswahrscheinlichket*: $p^n(x,y) = \sum_{z\in S} p^{n-1}(x,z)p(z,y)$
  - $p^n(x,y) = P_x(X_n = y)$
- *Die Green-Funktion*:

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x,y) = E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right]$$

- *Eintrittszeit von X in x*:

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$$

- Aufeinanderfolgende Besuchszeiten von X in x:

$$T_x^0 = 0, \quad T_x^k = \inf\{n > T_x^{k-1} \,:\, X_n = x\}$$

4.3.1 Rekurrenz und Transienz

Definition: Ein Zustand $x \in S$ heißt

- *rekurrent*, wenn $P_x(T_x < \infty) = 1$,
- *transient*, wenn $P_x(T_x < \infty) < 1$.

Die Markov-Kette heißt rekurrent (bzw. transient), wenn alle Zustände sind rekurrent (bzw. transient).

Lemma 29. *Seien $x, y, z \in S$. Dann gilt*

1.
$$P_x(T_z < \infty) \geq P_x(T_y < \infty)\, P_y(T_z < \infty)$$

2. *für alle $k \geq 1$*
$$P_x(T_y^k < \infty) = P_x(T_y < \infty)\, P_y(T_y < \infty)^{k-1}$$

3. *x ist rekurrent genau dann, wenn $G(x,x) = +\infty$*

4. *wenn y transient ist, dann*
$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{P_x(T_y < \infty)}{P_y(T_y = \infty)} & x \neq y \\ \frac{1}{P_x(T_x = \infty)} & x = y \end{cases}$$

Satz 30. *Seien $x \in S$ rekurrent und $y \in S$. Wenn $P_x(T_y < \infty) > 0$, dann ist y auch rekurrent und $P_x(T_y < \infty) = P_y(T_x < \infty) = 1$.*

- Insbes., wenn für einiges $y \in S$ gilt $P_x(T_y < \infty) > 0$ und $P_y(T_x < \infty) = 0$, dann ist x transient.

Definition: Eine diskrete Markov-Kette heißt *irreduzibel*, wenn $P_x(T_y < \infty) > 0$ für alle $x, y \in S$.

- Markov-Kette ist irreduzibel $\Longleftrightarrow$ für alle $x, y \in S$ existiert n s.d. $p^n(x,y) > 0 \Longleftrightarrow$ für alle $x, y \in S$ $G(x,y) > 0$.
- Alle Zustände einer irreduziblen Markov-Kette sind entweder rekurrent oder transient.
- Die einfache Irrfahrt in $\mathbb{Z}$ (Markov-Kette mit Übergangsmatrix $p(x, x+1) = p$, $p(x, x-1) = 1 - p$) ist irreduzibel genau dann, wenn $p \in (0,1)$. Sie ist rekurrent genau dann, wenn $p = \frac{1}{2}$.
- Verzweigungsprozess ist nicht irreduzibel. Der Zustand $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist rekurrent genau dann, wenn $x = 0$. Weiterhin, 0 ist absorbierend: $P_0(T_y < \infty) = 0$ für alle $y \geq 1$.

Proposition 31. *Wenn $|S| < \infty$, dann ist jede irreduzible Markov-Kette auf S rekurrent.*

4.3.2 Bedingungen für Rekurrenz und Transienz

Definition: Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch für die Markov-Kette X in* $x \in S$, wenn

$$f(x) = \sum_{y \in S} p(x,y) f(y)$$

und *superharmonisch für X in* $x \in S$, wenn

$$f(x) \geq \sum_{y \in S} p(x,y) f(y).$$

Lemma 32. *Sei $f : S \to \mathbb{R}$ harmonisch (bzw. superharmonisch) für die Markov-Kette X, dann ist $f(X_n)$ ein Martingal (bzw. Supermartingal).*

Proposition 33. *Sei X eine irreduzible diskrete Markov-Kette. Sei $K \subseteq S$ endlich und $\varphi : S \to [0, +\infty)$*

1. *superharmonisch für alle $x \in S \setminus K$ und*
2. *$\varphi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ (d.h. für alle $M < \infty$, die Menge $\{x \in S : \varphi(x) \leq M\}$ endlich ist).*

Dann ist X rekurrent.

Proposition 34. *Sei X eine irreduzible diskrete Markov-Kette. Sei $K \subseteq S$ endlich und $\varphi : S \to [0, +\infty)$*

1. *superharmonisch für alle $x \in S \setminus K$*
2. *$\varphi(x) > 0$ für alle $x \in K$*
3. *$\varphi(x) \to 0$ für $x \to \infty$ (d.h. für alle $\varepsilon > 0$, $\{x \in S : \varphi(x) > \varepsilon\}$ endlich ist).*

Dann ist X transient.

- Wenn X die einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$ ist und $\alpha \in (0,1)$, dann existiert M, so dass $\varphi(x) = \|x\|_2^{-\alpha}$ eine superharmonische Funktion für alle x mit $\|x\|_2 \geq M$.

Proposition 35. *Sei X irreduzible diskrete Markov-Kette. Dann ist X transient genau dann, wenn gibt es eine nicht-konstante nicht-negative superharmonische Funktion auf S.*

4.3.3 Invariantes Maß

Da der Zustandsraum S höchstens abzählbar ist, wird jedes Maß auf S eindeutig durch seine Werte für einelementigen Mengen $(\mu(\{x\}))_{x \in S}$, bestimmt. Wir schreiben $\mu(x)$ für $\mu(\{x\})$.

Definition: Ein Maß μ auf S heißt *invariantes Maß für Übergangsmatrix p (oder auch für die Markov-Kette X)*, wenn für alle $y \in S$,

$$\sum_{x \in S} \mu(x) p(x,y) = \mu(y).$$

Wenn $\mu(S) = \sum_{x \in S} \mu(x) = 1$, heißt μ *invariante Verteilung.*

- Sei μ invariante Verteilung für die Markov-Kette X. Wenn X_0 μ-verteilt ist, dann sind alle X_n auch μ-verteilt.
- Sei $S = \mathbb{Z}^d$ und $p(x,y) = \nu(y-x)$, wobei $\nu(z) \geq 0$ und $\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \nu(z) = 1$. Dann ist $\mu(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ invariantes Maß für p (oder auch für die Irrfahrt in $\mathbb{Z}^d$ mit ν-verteilten Zuwächsen).
- Im Allgemeinen, ist invariantes Maß nicht eindeutig, z.B. wenn $S = \mathbb{Z}$, $p(x,x+1) = p \neq \frac{1}{2}$, $p(x,x-1) = 1-p$, dann wird $\mu \equiv 1$ invariant für p als auch $\mu(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x$.
- Die Markov-Kette heißt *reversibel* bezüglich μ, wenn für alle $x,y \in S$

  $$\mu(x)p(x,y) = \mu(y)p(y,x)$$

  (detailliertes Gleichgewicht). Wenn die Markov-Kette reversibel bezüglich μ, dann ist μ für sie invariant.
- Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Gewichten $c(x,y) = c(y,x) \geq 0$ für $(x,y) \in E$. Sei $p(x,y) = \frac{c(x,y)}{c(x)}$ die Übergangsmatrix der einfachen Irrfahrt auf G, wobei $c(x) = \sum_{y\sim x} c(x,y)$. Dann ist die Irrfahrt eine Markov-Kette auf V, die reversibel bezüglich $\mu(x) = c(x)$ ist.

Satz 36 (Existenz). *Sei $x \in S$ rekurrent. Dann ist*

$$\mu_x(y) = E_x\left[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n = y, T_x > n), \quad y \in S,$$

invariantes Maß für X.

Satz 37 (Eindeutigkeit). *Sei X irreduzible rekurrente Markov-Kette. Dann ist invariantes Maß von X bis auf einen Faktor eindeutig.*

- Wenn X reduzibel oder transient, dann kann mehr als ein invariantes Maß existieren.

4.3.4 Invariante Verteilung

Obwohl existiert invariantes Maß für die Markov-Kette immer, wenn es mindestens einen rekurrenten Zustand gibt, existiert invariante Verteilung in solcher Allgemeinheit nicht, z.B. ist die einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}$ irreduzibel und rekurrent, aber $\sum_{z\in\mathbb{Z}} \mu(z) = +\infty$ oder $= 0$ für jedes invariantes Maß μ.

Proposition 38. *1. Sei π eine invariante Verteilung für p. Dann ist jedes $x \in S$ mit $\pi(x) > 0$ rekurrent.*

2. Sei p irreduzibel und besitzt eine invariante Verteilung π. Dann

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x[T_x]}, \quad x \in S.$$

Definition: Der Zustand $x \in S$ heißt *positiv rekurrent*, wenn $E_x[T_x] < \infty$. Jeder rekurrente Zustand, der nicht positiv rekurrent, heißt *nullrekurrent.*

Satz 39. *Sei X eine irreduzible Markov-Kette. Dann sind äquivalent:*

1. *es gibt eine invariante Verteilung für X,*
2. *alle $x \in S$ sind positiv rekurrent,*
3. *es gibt $x \in S$ positiv rekurrent.*

4.3.5 Konvergenz von Markov-Ketten

Definition: Sei $I_x = \{n \geq 1 : p^n(x,x) > 0\}$. Der gröste gemeinsame Teiler d_x aller $n \in I_x$ heißt *die Periode* von x.

Wenn $d_x = d_y$ für alle $x, y \in S$, heißt d_x die Periode von der Markov-Kette X.

Wenn $d_x = 1$ für alle $x \in S$, heißt die Markov-Kette *aperiodisch.*

- Eine einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}$ ist irreduzibel und rekurrent, aber nicht aperiodisch ($d_x = 2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$).

Proposition 40. *1. Für $x, y \in S$ mit $P_x(T_y < \infty) > 0$ und $P_y(T_x < \infty) > 0$ gilt $d_x = d_y$.*

- *Insbesondere, wenn X irreduzibel ist, dann gilt $d_x = d_y$ für alle $x, y \in S$. Weiterhin, wenn es ein x mit $p(x,x) > 0$ gibt, dann ist X aperiodisch.*

2. Wenn $d_x = 1$, dann existiert $n_x \in \mathbb{N}$, sodass $p^n(x,x) > 0$ für alle $n \geq n_x$.

Satz 41 (Konvergenz in L^1). *Sei X irreduzible aperiodische Markov-Kette mit invariander Verteilung π. Dann gilt für jedes $x \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{y \in S} |p^n(x,y) - \pi(y)| = 0.$$

- Wenn $|S| < \infty$, dann gibt es $C < \infty$ und $\gamma \in (0,1)$, sodass $\sum_{y \in S} |p^n(x,y) - \pi(y)| \leq C\gamma^n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Proposition 42. *Sei X irreduzible Markov-Kette mit invariander Verteilung π. Dann sind äquivalent:*

1. *X ist aperiodisch,*
2. *für alle $x \in S$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{y \in S} |p^n(x,y) - \pi(y)| = 0$,*
3. *es gibt $x \in S$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{y \in S} |p^n(x,y) - \pi(y)| = 0$.*

Satz 43 (Erneuerungssatz). *Sei $N_n(y) = \sum_{m=1}^n \mathbb{1}_{\{X_m = y\}}$ die Anzahl von Besuchen von y bis zum Zeitpunkt n. Dann gilt für alle $x \in S$ und alle rekurrente $y \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{E_y[T_y]} \mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}} \quad P_x\text{-f.s.}$$

- Da y rekurrent ist, gilt $P_y(T_y < \infty) = 1$. Deshalb, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{E_y[T_y]}$ P_y-f.s.
- Wenn y positiv rekurrent ist, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} > 0$ P_y-f.s. (positiver Anteil der Zeit wird in y verbracht), wenn y nullrekurrent ist, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = 0$ P_y-f.s.
- Da $\frac{N_n(y)}{n} \in [0,1]$, folgt es vom Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} E_x\left[\frac{N_n(y)}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p^m(x,y) = \frac{P_x(T_y < \infty)}{E_y[T_y]}.$$

Beachte, dass diese Konvergenz auch für y transient gilt, nähmlich, wenn y transient ist, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n p^m(x,y) = 0$. Mit anderen Worten, für alle $x, y \in S$, ist die Folge $(p^n(x,y))_{n \geq 1}$ *Cesàro-konvergent.*

Satz 44 (Starkes Gesetz von der großen Zahlen). *Seien X irreduzible Markov-Kette mit invarianter Verteilung π und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sum_{x \in S} |f(x)|\pi(x) < \infty$. Dann gilt für jede Anfangsverteilung μ von X,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^n f(X_m)}{n} = \sum_{y \in S} f(y)\pi(y), \quad P_\mu\text{-f.s.}$$