ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 11 (Abgabe am 6.2.2019)

Sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene diskrete Markov-Kette mit Übergangsmatrix p auf dem (höchstens abzählbaren) Zustandsraum S. Für $x \in S$ heißt der größte gemeinsame Teiler d_x aller $n \in \mathbb{N}$ mit $p^n(x,x) > 0$ die *Periode von* x. Wenn $d_x = d_y$ für alle $x, y \in S$, heißt d_x die *Periode von der Markov-Kette* X. Wenn $d_x = 1$ für alle $x \in S$, heißt die Markov-Kette X *aperiodisch*.

1. Für jedes $\alpha \in [0,1]$, bestimmen Sie, ob die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) irreduzibel, (b) aperiodisch ist. Berechnen Sie ihre invariante Verteilung π und durchschnittliche Eintrittszeiten $E_x[T_x]$, $x \in \{1,2,3\}$. ($T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$.) Für welche $\alpha \in [0,1]$, $x, y \in \{1,2,3\}$ konvergiert $p^n(x,y) = P_x(X_n = y)$ gegen $\pi(y)$?

2. Seien $(\xi_{n,i})_{n\geq 0, i\geq 1}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen. Die Zufallsvariablen $\xi_{n,i}$ sind Bernoulli-verteilt mit Paramter $p \in (0,1)$. Die Zufallsvariablen Y_n sind Poisson-verteilt mit Paramter $\lambda > 0$. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ die Markov-Kette definiert durch

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n,i} + Y_{n+1}.$$

Bestimmen sie die Zahl $\mu = \mu(p, \lambda) > 0$, so dass die Poisson-Verteilung mit Paramter μ die invariante Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$ ist.

3. Sei X irreduzibel und aperiodisch und $|S| < \infty$. Beweisen Sie, dass es $m \geq 1$ gibt, so dass $p^m(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$.

4. Seien $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ unabhängige irreduzible aperiodische Markov-Ketten auf dem endlichen Zustandsraum S. Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$.

   (a) Beweisen Sie, dass es $C < \infty$ und $0 < \gamma < 1$ gibt, so dass $P(T \geq n) \leq C\gamma^n$ für alle $n \geq 1$.

   [Hinweis: Zunächst betrachten Sie den Fall, wenn $p(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$. Im algemenen Fall, nutzen Sie die Aufgabe 3.]

   (b) Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in S$, $\sum_{z \in S} |p^n(x,z) - p^n(y,z)| \leq 2C\gamma^n$ für alle $n \geq 1$ und C, γ aus Teil (a). Schließen Sie daraus, dass $p^n(x,z)$ gegen der invariante Verteilung $\pi(z)$ exponentiell schnell konvergiert.