ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 10 (Abgabe am 30.1.2019)

Sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene diskrete Markov-Kette mit Übergangsmatrix p auf dem (höchstens abzählbaren) Zustandsraum S. Das Maß μ auf S heißt *invariantes Maß für* X, wenn $\sum_{x\in S}\mu(x)p(x,y) = \mu(y)$ für alle $y \in S$.

Existenz: Sei x ein rekurrenter Zustand. Dann ist das Maß

$$\mu_x(y) = E_x\left[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n = y, T_x > n)$$

invariant für X, wobei $T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ die Eintrittszeit von X in x ist.

Eindeutigkeit: Wenn X irreduzibel und rekurrent ist, dann ist ein invariantes Maß für X bis auf einen Faktor eindeutig.

Der Zustand $x \in S$ heißt *positiv rekurrent*, wenn $E_x[T_x] < \infty$.

1. Sei X irreduzibel und μ ein nicht-triviales (d.h. $\sum_x \mu(x) > 0$) invariantes Maß für X. Beweisen Sie, dass $\mu(x) > 0$ für alle $x \in S$.

2. Sei X irreduzibel und rekurrent. Beweisen Sie, dass $\mu_x(y)\mu_y(z) = \mu_x(z)$ für alle $x, y, z \in S$.

   [Hinweis: Nutzen Sie den Eindeutigkeitssatz.]

3. Sei X_n die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, d.h. $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$, wobei $(\xi_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Beweisen Sie, dass

$$E_x\left[\sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}\right] = 1, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{Z}.$$

4. Sei $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p(i, i-1) = 1$ für alle $i \geq 1$ und $p(0, i) = f_i$ für $i \geq 0$, wobei $f_i \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{\infty} f_i = 1$. Bestimmen Sie alle Folgen $(f_i)_{i\geq 0}$, so dass 0 positiv rekurrent ist.

5. Sei $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $E_0[X_1] < \infty$ und $E_x[X_1] \leq x - \varepsilon$ für gegebenes $\varepsilon > 0$ und alle $x \geq 1$. Beweisen Sie, dass 0 positiv rekurrent ist.

   [Hinweis: Sei $Y_n = X_n + n\varepsilon$, dann ist $Y_{n\wedge T_0}$ ein positives Supermartingal. Schließen Sie daraus, dass $E_x[T_0] \leq \frac{x}{\varepsilon}$ für alle $x \geq 1$.]

6. Sei X irreduzibel und $y \in S$ positiv rekurrent. Beweisen Sie, dass für alle $x \in S$, $E_x[T_y] < \infty$.

   [Hinweis: Für jedes $x \in S$ gibt es $x_1, \ldots, x_k \neq x, y$, so dass $p(y, x_1) \ldots p(x_k, x) > 0$.]