ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 9 (Abgabe am 23.1.2019)

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene diskrete Markov-Kette mit Übergangsmatrix p auf dem (höchstens abzählbaren) Zustandsraum S. Sei $T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ die *Eintrittszeit von* $(X_n)_{n\geq 0}$ *in* x. Der Zustand $x \in S$ heißt *rekurrent*, wenn $P_x(T_x < \infty) = 1$, und sonst *transient*. Die Markov-Kette heißt *irreduzibel*, wenn für alle $x, y \in S$, $P_x(T_y < \infty) > 0$.

1. Bestimmen Sie den Typ (rekurrent oder transient) jedes Zustands für die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

   Ist die Markov-Kette irreduzibel?

2. Sei $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p(i, i-1) = 1$ für alle $i \geq 1$ und $p(0, i) = f_i$ für $i \geq 0$, wobei $f_i \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{\infty} f_i = 1$.

   (a) Beweisen Sie, dass 0 rekurrent ist.

   (b) Bestimmen Sie alle Folgen $(f_i)_{i\geq 0}$, so dass die Markov-Kette irreduzibel ist.

   (c) Bestimmen Sie alle Folgen $(f_i)_{i\geq 0}$, so dass i rekurrent ist genau dann, wenn $0 \leq i \leq 23$.

3. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible Markov-Kette mit abzählbar unendlichem Zustandsraum S. Sei K endliche Teilmenge von S. Sei $\varphi : S \to [0, +\infty)$ mit

   (a) $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in K$,

   (b) φ ist superharmonisch in $S \setminus K$ (d.h. $\sum_{y\in S} p(x, y)\varphi(y) \leq \varphi(x)$ für $x \in S \setminus K$),

   (c) $\varphi(x) \to 0$ für $x \to \infty$ (d.h. für alle $\varepsilon > 0$, die Menge $\{x : \varphi(x) > \varepsilon\}$ ist endlich).

   Beweisen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ transient ist.

   [Hinweis: (1) Es gibt $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\varphi(x) \geq \varepsilon_0$ für alle $x \in K$. (2) Seien $N_K = \inf\{n \geq 0 : X_n \in K\}$ und $N_\varepsilon = \inf\{n \geq 0 : \varphi(X_n) \leq \varepsilon\}$, dann $N = N_K \wedge N_\varepsilon < \infty$ und $\varphi(X_{n\wedge N})$ ist ein Supermartingal. (3) Wähle x mit $\varphi(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ und betrachte $E_x[\varphi(X_{n\wedge N})]$.]

4. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ die einfache symmetrische Irrfahrt in $\mathbb{Z}^3$ (d.h. $p(x, y) = \frac{1}{6}$ für $x, y \in \mathbb{Z}^3$ mit $\|x - y\|_2 = 1$ und $= 0$ sonst, wobei für $z = (z_1, z_2, z_3)$, $\|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$). Setze $\varphi(x) = \|x\|_2^{-\alpha}$ für $x \neq 0$, wobei $0 < \alpha < 1$. Beweisen Sie die Existenz von $C < \infty$, so dass φ superharmonisch für $(X_n)_{n\geq 0}$ ist für alle $x \in \mathbb{Z}^3$ mit $\|x\|_2 \geq C$. Schließen Sie daraus, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ transient ist.

   [Hinweis: Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwiklung, dass $\frac{E_x[\varphi(X_1)]}{\varphi(x)} = 1 + \left(-\frac{3\alpha}{2} + \alpha(\frac{\alpha}{2} + 1)\right) \frac{1}{\|x\|_2^2} + o(\frac{1}{\|x\|_2^2})$, für $\|x\|_2 \to \infty$.]