ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 8 (Abgabe am 16.1.2019)

Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 0}$ auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Werten im (höchstens abzählbaren) Zustandsraum S heißt eine *homogene diskrete Markov-Kette* mit Übergangsmatrix p und Verteilungen $(P_x)_{x\in S}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$, wenn für alle $x \in S$, $P_x(X_0 = x) = 1$ und $P_x(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p(x, x_1)p(x_1, x_2)\ldots p(x_{n-1}, x_n)$.

Sei $F : S^{\{0,1,\cdots\}} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte messbare Funktion. Es gelten (a) die *Markov-Eigenschaft*:

$$E_x\left[F\left((X_{n+m})_{m\geq 0}\right) \mid X_0, \ldots, X_n\right] = E_{X_n}\left[F\left((X_m)_{m\geq 0}\right)\right], \quad \text{f.s.}$$

und (b) die *starke Markov-Eigenschaft*: für jede Stoppzeit N bezüglich $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$,

$$E_x\left[F\left((X_{N+m})_{m\geq 0}\right) \mid \mathscr{F}_N\right] \mathbb{1}_{\{N<\infty\}} = E_{X_N}\left[F\left((X_m)_{m\geq 0}\right)\right] \mathbb{1}_{\{N<\infty\}}, \quad \text{f.s.}$$

Seien $p^n(x,y) = P_x(X_n = y)$ die *n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit*, $G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x,y) = E_x[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}]$ die *Greenfunktion* und $T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ die *Eintrittszeit von X in x*.

1. Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 1$, $x, y \in S$,

$$p^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)\, p^{n-m}(y,y).$$

2. Beweisen Sie, dass für alle $y \in S$ mit $P_y(T_y < \infty) < 1$ und $x \neq y$,

$$G(x,y) = \frac{P_x(T_y < \infty)}{1 - P_y(T_y < \infty)}.$$

3. Für $C \subseteq S$, sei $H_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$. Für $A, B \subseteq S$ mit $A \cap B = \emptyset$, sei $h(x) = P_x(H_A < H_B)$. Beweisen Sie, dass

$$h(x) = \sum_{y\in S} p(x,y)h(y), \text{ für alle } x \in S \setminus (A \cup B).$$

4. Sei S endlich und $P_x(H_y < \infty) = 1$ für alle $x, y \in S$, wobei $H_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$. Beweisen Sie, dass es $\gamma \in (0,1)$ und $C < \infty$ gibt, so dass

$$P_x(H_y \geq n) \leq C\gamma^n, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x, y \in S.$$

[Hinweis: (a) Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass $\max_{x,y\in S} P_x(H_y \geq N) < 1$. (b) $\max_{x\in S} P_x(H_y \geq kN) \leq (\max_{x\in S} P_x(H_y \geq N))^k$.]

5. Lösen Sie die Aufgabe 4 für T_y anstelle von H_y.