ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 7 (Abgabe am 9.1.2019)

Eine Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, die nur Werte aus dem höchstens abzählbaren Zustandsraum S annehmen, heißt eine (diskrete) *Markov-Kette*, wenn

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

für alle $n \geq 0$, $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$. Die Markov-Kette heißt *homogen*, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ unabhängig von n sind. Die Matrix $(p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i))_{i,j\in S}$ heißt die *Übergangsmatrix* der homogenen Markov-Kette.

1. Seien $(\xi_n)_{n\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_n = K) = P(\xi_n = Z) = \frac{1}{2}$. Beweisen Sie, dass $X_n = (\xi_n, \xi_{n+1})$ $(\in \{K, Z\}^2)$ eine Markov-Kette ist, und berechnen Sie ihre Übergangsmatrix.

2. Seien $(\xi_n)_{n\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_n = i) = \frac{1}{N}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Beweisen Sie, dass $X_n = |\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}|$ (die Anzahl der verschiedenen ξ_i's) eine Markov-Kette ist, und berechnen Sie ihre Übergangsmatrix.

3. Seien $(\xi_n)_{n\geq 0}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass $X_n = \max\limits_{0\leq i\leq n} \xi_i$ eine Markov-Kette ist.

4. Seien $(\xi_n)_{n\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. Beweisen Sie, dass $X_n = \frac{\xi_n+\xi_{n+1}}{2}$ keine Markov-Kette ist.

5. Seien $(\xi_n)_{n\geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(\xi_n = 1) = p$ und $P(\xi_n = -1) = 1 - p$. Beweisen Sie, dass $X_n = \xi_n\xi_{n+1}$ eine Markov-Kette ist genau dann, wenn $p \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.