ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 6 (Abgabe am 19.12.2018)

1. Seien $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, $(A_i)_{i\geq 1}$ eine messbare Partition von Ω und $p_i = P(A_i)$. (Insbesondere, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.) Für $a_i \geq 0$, definiere
$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$
(m.a.W., $X(\omega) = a_i$ für $\omega \in A_i$).
Nimm an, dass $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ (d.h. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i < \infty$) und setze $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(A_1, \ldots, A_n)$ (für $n \geq 1$) und $X_n = E[X \mid \mathscr{F}_n]$ (für $n \geq 0$).
   (a) Man berechne X_n (als eine Funktion von a_i und p_j).
   (b) Man zeige, dass
$$\sup_{n\geq 0} |X_n(\omega)| \geq \frac{\sum_{k=i}^{\infty} a_k p_k}{\sum_{k=i}^{\infty} p_k}, \text{ für } \omega \in A_i. \quad \left(\text{M.a.W. } \sup_{n\geq 0} |X_n| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=i}^{\infty} a_k p_k}{\sum_{k=i}^{\infty} p_k} \mathbb{1}_{A_i}.\right)$$
   (c) Man gebe ein Beispiel für $(a_i)_{i\geq 1}$ und $(p_i)_{i\geq 1}$, sodass $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und $\sup_{n\geq 0} |X_n| \notin L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$. (Beachten Sie, dass X_n ein Martingal ist, das in L^1 konvergiert.)

2. Seien $(\xi_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. integrierbare Zufallsvariablen mit $m = E[\xi_1]$ und $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Beweisen Sie, dass $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} m$.
[Hinweis: Beachten Sie, dass es ausreicht zu beweisen, dass $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 0}$ gleichmäßig integrierbar sind. Dies kann direkt aus der Definition nachgewiesen werden. Jedoch ist es einfacher die Gleichung $\frac{S_n}{n} = E[\xi_1 \mid S_n]$ zu nutzen.]

3. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ der Galton-Watson-Prozess wie in ÜA. 4, Ü. 2 mit $P(\xi_1^1 = 0) = \nu(0) > 0$. Verwenden Sie das 0-1-Gesetz von Levy, um zu beweisen, dass
$$P\left(\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\} \cup \{\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty\}\right) = 1.$$
[Hinweis: Wenden Sie das 0-1-Gesetz von Levy auf das Ereignis $A = \{1 \leq Z_n \leq k \text{ u.o.}\}$ für ein beliebiges $1 \leq k < \infty$ um zu beweisen, dass $P(A) = 0$. Um dies zu zeigen, beachten Sie, dass $P(A \mid \mathscr{F}_n) \leq P(Z_{n+1} \neq 0 \mid \mathscr{F}_n) \leq 1 - \nu(0)^k < 1$ für fast alle $\omega \in \{Z_n \leq k\}$.]

4. In einer Gruppe von Freunden gibt es n Männer und n Frauen. Jede Frau macht einem willkürlich ausgewählten männlichen Freund aus der Gruppe ein Weihnachtsgeschenk, ohne ihre Wahl des Mannes mit anderen Frauen zu besprechen. Sei L_n die Anzahl der Männer, die kein Geschenk bekommen. Beweisen Sie, dass
   (a) $E[L_n] = \frac{n}{e} + O(1)$, für $n \to \infty$.
   (b) $P\left(|L_n - E[L_n]| > x\sqrt{n}\right) \leq 2\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, für $x > 0$.

[Hinweis: Um (b) zu beweisen, suchen Sie ein Martingal $(X_i)_{0\leq i\leq n}$ mit $X_0 = E[L_n]$, $X_n = L_n$ und $|X_i - X_{i-1}| \leq 1$. Wenden Sie dann die Azuma-Hoeffding-Ungleichung auf X_i an.]