ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 5 (Abgabe am 12.12.2018)

1. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Submartingal. Setze $\overline{X}_n = \max_{0\leq m\leq n} X_m^+$, wobei $x^+ = \max(x,0)$ und definiere $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$. Beweisen Sie, dass

$$E[\overline{X}_n] \leq \left(1 - e^{-1}\right)^{-1} \left(1 + E\left[X_n^+ \ln^+(X_n^+)\right]\right).$$

[Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass für alle $M > 0$, $E[\overline{X}_n \wedge M] \leq 1 + E[X_n^+ \ln^+(\overline{X}_n \wedge M)]$, indem Sie die Schritte des Beweises der L^p-maximalen Ungleichung befolgen. Dann beweisen Sie, dass für alle $a, b > 0$, $a \ln b \leq a \ln a + \frac{b}{e}$. Insbesondere, $a \ln^+ b \leq a \ln^+ a + \frac{b}{e}$. Wenden Sie die Ungleichung auf $a = X_n^+$ und $b = \overline{X}_n \wedge M$.]

Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$ heißt *gleichmäßig integrierbar* (auch *gleichgradig integrierbar*), wenn

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} E\left[|X_i|\, \mathbb{1}_{\{|X_i|\geq M\}}\right] = 0.$$

2. (a) Seien $p > 1$ und $(X_n)_{n\geq 1}$ Zufallsvariablen mit $\sup\limits_{n\geq 1} E[|X_n|^p] < \infty$. Beweisen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig integrierbar sind.

   (b) Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$, mit $\sup\limits_{n\geq 1} E[|X_n|] < \infty$, die nicht gleichmäßig integrierbar sind.

3. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ und Y Zufallsvariablen mit $E[Y] < \infty$. Beweisen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig integrierbar sind, wenn

   (a) $|X_n| \leq Y$ für alle n.

   (b) $P(|X_n| \geq x) \leq P(Y \geq x)$ für alle $x > 0$ und $n \geq 1$.

4. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ und $(Y_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig integrierbare Familien von Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass die Familie $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig integrierbar ist.

5. Beweisen Sie, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind:

   (a) Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$ sind gleichmäßig integrierbar.

   (b) Es gibt Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$ und $\sup\limits_{n\geq 1} E\left[\varphi(|X_n|)\right] < \infty$.