ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 3 (Abgabe am 28.11.2018)

1. Seien $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$. Beweisen Sie, dass für $a > 0$,
$$P\left(|X| \geq a \,|\, \mathscr{G}\right) \leq \frac{E\left[X^2 \,|\, \mathscr{G}\right]}{a^2} \quad P\text{-f.s.},$$
wobei $P(A \,|\, \mathscr{G}) = E[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{G}]$ die bedingte W-keit von $A \in \mathscr{F}$ gegeben $\mathscr{G}$ ist.

2. Seien X und $\mathscr{G}$ wie in 1. und definiere $\mathrm{var}\,(X \,|\, \mathscr{G}) = E\left[X^2 \,|\, \mathscr{G}\right] - \left(E\left[X \,|\, \mathscr{G}\right]\right)^2$. Beweisen Sie, dass
$$\mathrm{var}(X) = E\left[\mathrm{var}\,(X \,|\, \mathscr{G})\right] + \mathrm{var}\left(E\left[X \,|\, \mathscr{G}\right]\right).$$

3. Seien $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$ und $C \in \mathscr{G}$. Seien $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ für alle $\omega \in C$. Beweisen Sie, dass $E[X_1 \,|\, \mathscr{G}](\omega) = E[X_2 \,|\, \mathscr{G}](\omega)$ für P-fast alle $\omega \in C$.

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum. Eine steigende Folge $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathscr{F}$, d.h. $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{F}$, heißt *Filtrierung*. Eine Folge von Zufallsvariablen M_n heißt $(\mathscr{F}_n)$-*adaptiert*, falls für alle $n \geq 0$, M_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist. Eine Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ von $(\mathscr{F}_n)$-adaptierten integrierbaren Zufallsvariablen heißt *Martingal (bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n$)*, falls für alle $n \geq 0$, P-f.s., $E[M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n] = M_n$.

4. Seien X_k, $k \geq 1$, unabhängige integrierbare Zufallsvariablen mit $E[X_k] = 1$ für alle $k \geq 1$. Beweisen Sie, dass
$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ist.

5. Seien X_k, $k \geq 1$, unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ für alle $k \geq 1$. Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$
$$M_n = \frac{e^{i\alpha S_n}}{\cos^n \alpha}$$
ein Martingal bezüglich $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ist.

6. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable und $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtrierung. Beweisen Sie, dass $M_n = E[X \,|\, \mathscr{F}_n]$ ein Martingal bezüglich $\mathscr{F}_n$ ist.

7. Sei M_n ein Martingal mit $E[M_0^2] < \infty$ und $\sup\limits_{n\geq 1} E[(M_n - M_{n-1})^2] < \infty$. Beweisen Sie, dass $\frac{M_n}{n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert.