ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 2 (Abgabe am 14.11.2018)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und $\mathscr{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$. Der *bedingte Erwartungswert von* X *gegeben* $\mathscr{G}$ ist eine Zufallsvariable Z, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: (1) Z ist $\mathscr{G}$-messbar und (2) für alle $C \in \mathscr{G}$ gilt $E[\mathbb{1}_C\, Z] = E[\mathbb{1}_C\, X]$. Z ist durch (1)-(2) bis auf P-fast sichere Äquivalenz eindeutig definiert. Notation: $E[X \,|\, \mathscr{G}]$. Für eine Zufallsvariable Y bezeichnet man $E[X \,|\, \sigma(Y)]$ auch mit $E[X \,|\, Y]$.

1. Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte
$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x, y \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Man berechne $E[X \,|\, Y]$.

2. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, wobei $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$ und P das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist. Sei $\mathscr{G}$ die Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$, die von den Intervallen $[0, \frac{1}{3})$, $\{\frac{1}{3}\}$ und $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ erzeugt wird. Man berechne $E[X \,|\, \mathscr{G}]$, wenn
   (a) $X(\omega) = \omega$, $\omega \in [0,1]$;
   (b) $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \frac{1}{3}], \\ 2, & \omega \in (\frac{1}{3}, 1]; \end{cases}$
   (c) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, \frac{2}{3}], \\ 1, & \omega \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$

3. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, wobei $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$ und P das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist. Seien $X(\omega) = \omega$ und $Y(\omega) = \min(2\omega, 1)$ für $\omega \in [0,1]$. Man berechne $E[X \,|\, Y]$.

4. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 und $t > 0$. Man berechne $E[X \mid \min(X,t)]$.

5. Seien X und Y i.i.d. integrierbare Zufallsvariablen. Man finde $E[X \mid X + Y]$.