ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 1 (Abgabe am 07.11.2018)

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, $X_1, X_2, \ldots$ $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariablen auf Ω, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ eine Filtrierung. Eine Zufallsvariable N mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ heißt *Stoppzeit* (bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$) falls $\{N = n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \geq 0$. Die *σ-Algebra der N-Vergangenheit* ist durch $\mathscr{F}_N = \{E \in \mathscr{F} : E \cap \{N = n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \geq 0\}$ definiert. Seien $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Falls X_n i.i.d. sind, heißt S_n eine *Irrfahrt* in $\mathbb{R}^d$.

1. Seien M und N Stoppzeiten. Beweisen Sie, dass $M + N$ eine Stoppzeit ist.

2. Für $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, sei $H_D = \inf\{n \geq 0 : S_n \in D\}$ die erste Besuchszeit in D. Beweisen Sie, dass für $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, das Ereignis $\{H_A \leq H_B\}$ liegt in $\mathscr{F}_{H_B}$.

3. Sei S_n eine Irrfahrt in $\mathbb{R}$. Seien $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = \inf\{n > \alpha_{k-1} : S_n > S_{\alpha_{k-1}}\}$ $(k \geq 1)$, wobei $\alpha_k = +\infty$ falls $\alpha_{k-1} = +\infty$ oder $\alpha_{k-1} < +\infty$ und $S_n \leq S_{\alpha_{k-1}}$ für alle $n > \alpha_{k-1}$. (α_k heißen *Leiterepochen.*) Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach.
   (a) $P(\alpha_k < \infty) = P(\alpha_1 < \infty)^k$
   (b) Falls $P(\alpha_1 < \infty) < 1$, dann gilt $P(\sup_{n\geq 0} S_n < +\infty) = 1$.
   (c) Falls $P(\alpha_1 < \infty) = 1$, dann gilt $P(\sup_{n\geq 0} S_n = +\infty) = 1$.
   (d) Falls X_1 integrierbar ist und $E[X_1] < 0$, dann gilt $P(\alpha_1 < \infty) < 1$.

4. Sei $d \in \mathbb{N}$. Seien $S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)}$ unabhängige einfache Irrfahrten in $\mathbb{R}$. (Dies bedeutet, dass die Zuwächse von jeder $S_n^{(i)}$ die Werte 1 oder -1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen.) Sei $S_n = (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(d)})$ eine Irrfahrt in $\mathbb{R}^d$. Beweisen Sie, dass S_n rekurrent wenn $d \in \{1, 2\}$ und transient wenn $d \geq 3$ ist.