WIEDERHOLUNGSÜBUNGEN

1. Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A \in \mathcal{F}$ ein Ereigniss. Ist $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \omega \in A \\ Y(\omega) & \omega \notin A \end{cases}$$

eine Zufallsvariable?

2. Für welche Ereignisse A und B, sind $A \cap B$ und $A \cup B$ unabhängig?

3. Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Man bestimme die Dichte der Zufallsvariable $Y = e^X$.

[Die Verteilung von Y nennt man die Logarithmische Normalverteilung.]

4. Seien X, X_n Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f(X_n) \xrightarrow{f.s.} f(X)$.

5. Seien X und Y Zufallsvariablen so, dass Y $\sigma(X)$-messbar ist. Beweisen Sie, dass $Y = f(X)$, wobei f eine Borel-messbare Funktion ist.

[Hinweis: Man beginne mit dem Fall $Y = \mathbb{1}_A$, $A \in \sigma(X)$.]

6. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse und $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{1}_A = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}).$$

Dann erhalte man durch Integration der Identität die Siebformel von Sylvester.

7. Seien X eine Zufallsvariable und $b > 0$ eine reelle Zahl so, dass $E[|X|^b] < \infty$. Beweisen Sie, dass $E[|X|^a] < \infty$ für alle $a \in (0, b)$.

8. Seien X_n nichtnegative Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass

$$E[\sum_{n=1}^\infty X_n] = \sum_{n=1}^\infty E[X_n].$$

9. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen so, dass X eine Dichte besitzt. Beweisen Sie, dass $P(X = Y) = 0$.

10. Seien X_n Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ und $E[X_m X_n] \le f(n - m)$ für alle $m \le n$, wobei $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \text{ in } L^2 \text{ und in Wahrscheinlichkeit.}$$

11. Seien X, X_n Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{P} X$. Weisen Sie die folgende Aussagen nach:

(a) Falls $X_n \geq 0$, dann $\liminf_n E[X_n] \geq E[X]$.

(b) Falls $|X_n| \leq Y$, wobei Y eine integrierbare Zufallsvariable ist, dann $E[X_n] \to E[X]$.

12. Seien X_n Zufallsvariablen. Beweisen Sie die Existenz eine Folge a_n von reellen Zahlen so, dass $\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{f.s.} 0$.

13. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen. Beweisen Sie dass $\sup_n X_n < \infty$ fast sicher genau dann, wenn es $A \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > A) < \infty$.

14. Man gib ein Beispiel für (a) nicht integrierbare Zufallsvariable, (b) integrierbare Zufallsvariable mit unendlicher Varianz.

15. Man gib ein Beispiel für zwei abhängige unkorrelierte Zufallsvariablen.

16. Man gib ein Beispiel für Folge von Zufallsvariablen X_n mit der drei Eigenschaften: (i) $X_n \xrightarrow{P} 0$, (ii) $\limsup_n X_n = +\infty$ f.s., (iii) $\liminf X_n = -\infty$ f.s..

17. Seien X_n unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1 und $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Beweisen Sie, dass

$$M_n - \ln n \Longrightarrow Y,$$

wobei Y eine Zufallsvariable mit $F_Y(y) = \exp(-\exp(-y))$, $y \in \mathbb{R}$.

[Die Verteilung von Y heißt die Gumbel-Verteilung.]

18. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion $\exp(-|t|^{\alpha})$. Beweisen Sie, dass

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \stackrel{d}{=} X_1.$$

[Der Fall $\alpha = 2$ entspricht die Normalverteilung, $\alpha = 1$ die Cauchy-Verteilung.]

19. Seien X_n unabhängige identischverteilte Zufallsvariablen mit $E[X_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Beweisen Sie, dass

$$\limsup_n \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ f.s.}$$

Insbesondere konvergiert die Folge $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$ fast sicher nicht.

[Hinweis: Man wende den Zentralergrenzwertzatz und das $0-1$ Gesetz von Kolmogorov.]

20. Seien X_n unabhängige identischverteilte Zufallsvariablen mit $E[X_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Beweisen Sie, dass die Folge $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$ in Wahrscheinlichkeit nicht konvergiert.

[Hinweis: Widerspruch-Argument. Man betrachte $\frac{X_1 + \ldots + X_{n_k}}{\sqrt{n_k}}$, wobei n_k eine schnell wachsende Teilfolge ist ($(n_k - n_{k-1} \sim n_k$ reicht aus, z.B. $n_k = k!$). Man wende den Zentralergrenzwertzatz an.]