ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 13 (Abgabe am 11.07.2018)

1. Sei X_n normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern μ_n und σ_n^2 ($X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$) und die Folge X_n konvergiert in Verteilung. Beweisen Sie, dass die Folgen von Erwartungswerten μ_n und Varianzen σ_n^2 konvergiern.

2. Seien X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass X und Y normalverteilte Zufallsvariablen sind, falls $X + Y$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

3. Sei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion φ, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für $n \to \infty$,
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n \to e^{iat} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

4. Sei μ eine Verteilung auf $\mathbb{R}$ und φ die charakteristische Funktion von μ. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

   (a)
   $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)dt = \mu(\{0\})$$

   (b) Falls X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung μ sind, dann gilt
   $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = P(X - Y = 0) = \sum_{x\,:\,\mu(\{x\})>0} \mu(\{x\})^2.$$

   (c) Falls $\varphi(t) \to 0$ für $t \to \infty$, dann gilt $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. Sei $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen und $\delta > 0$. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

   (a) Falls $\varphi_X(t) = 1$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$, dann $X = 0$ f.s.

   (b) $X_n \Longrightarrow 0$ genau dann, wenn $\varphi_{X_n}(t) \to 1$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$.