

**ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 12** (Abgabe am 04.07.2018)

1. Sei  $X, X_1, X_2, \dots$  ganzzahlige Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass  $X_n$  in Verteilung gegen  $X$  konvergiert genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Sei  $X_n$  eine Folge von Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable  $X$  konvergiert. Beweisen Sie, dass für jede stetige Funktion  $g$ ,  $g(X_n) \Rightarrow g(X)$ .
3. Geben Sie ein Beispiel für eine Folge  $\mu_n$  von Verteilungen auf  $\mathbb{R}$ , die schwach gegen eine Verteilung  $\mu$  konvergiert, und eine stetige Funktion  $g$ , so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu_n(dx) \not\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mu(dx), \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

4. Sei  $X, X_1, X_2, \dots$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

(a) Falls  $X_n \xrightarrow{P} X$ , dann  $X_n \Rightarrow X$ , aber nicht umgekehrt.

(b) Falls  $X_n \Rightarrow c$ , dann  $X_n \xrightarrow{P} c$ .

5. Sei  $X, X_1, X_2, \dots$  und  $Y_1, Y_2, \dots$  Zufallsvariablen ( $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $X_n$  und  $Y_n$  auf  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ ) und  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $X_n \Rightarrow X$  und  $Y_n \Rightarrow c$ . Beweisen Sie, dass  $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$ .

6. Sei  $F_n$  eine Folge von Verteilungsfunktionen, die schwach gegen eine *stetige* Verteilungsfunktion  $F$  konvergiert. Beweisen Sie, dass  $F_n$  gleichmäßig gegen  $F$  konvergiert, m.a.W.,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$