ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 11 (Abgabe am 27.06.2018)

1. Sei $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen und $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|X_n - X|^p\right] < \infty$ für einige $p > 0$. Beweisen Sie, dass X_n konvergiert gegen X fast sicher.

2. Sei $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[0,1]$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} U_i$ konvergiert fast sicher.

3. Sei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ und $E[X_n^2] \leq 1$ für $n \geq 1$.
   (a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ konvergiert fast sicher.
   (b) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ immer noch, wenn die Annahme "$E[X_n] = 0$ für alle $n \geq 1$" fehlt?

4. Sei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgende drei Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ f.s.,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > 1) < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq 1\}}\right] < \infty$,
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{X_n}{1+X_n}\right] < \infty$.

5. Sei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für alle $n \geq 1$. Nimm an, dass die beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[X_n^2 \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq 1\}}\right]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq 1\}}\right]$ konvergieren. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher.

6. Sei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für alle $n \geq 1$. Nimm an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} E\left[|X_n|^p\right] < \infty$ für einige $p \in [1,2]$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher.