ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 10 (Abgabe am 20.06.2018)

1. Sei $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = p_n$ und $P(X_n = 0) = 1 - 2p_n$, für $n \in \mathbb{N}$. Sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Beweisen Sie, dass $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$, wenn

   (a) $p_n = n^{-2}$ (b) $p_n = n^{-\frac{3}{2}}$.

2. Sei $a > 0$ und $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit $\sum_{k=1}^\infty E\left[|X_k - X|^a\right] < \infty$. Beweisen Sie, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

3. Sei $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[X_1] = \mu$ und $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$. Beweisen Sie, dass die Zufallsvariablen
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$$
in Wahrscheinlichkeit konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert.

4. Sei $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{P} X$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$, wenn
   (a) g gleichmäßig stetig ist,
   (b) g stetig ist.

5. Man gib ein Beispiel für Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit Werten in $\{0, 1\}$ und Zufallsvariablen $N_1, N_2, \dots$ mit Werten in $\mathbb{N}$, so dass $X_n \xrightarrow{P} 0$, $N_n \nearrow \infty$ f.s. und $X_{N_n} \xrightarrow{f.s.} 1$.