ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 9 (Abgabe am 13.06.2018)

1. Sei X_n und X Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und X_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X . Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach.

(a) Falls $X_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\liminf_n E[X_n] \geq E[X]$.

(b) Falls $|X_n| \leq Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei Y eine integrierbare Zufallsvariable ist, dann gilt $\lim_n E[X_n] = E[X]$.

[Mit anderen Worten, man kann die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou bzw. des Satzes von der dominierten Konvergenz lockern, indem man die fast sichere Konvergenz durch die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ersetzt.]

2. Sei $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = p_n$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach.

(a) $X_n \xrightarrow{P} 0$ genau dann, wenn $p_n \rightarrow 0$.

(b) $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ genau dann, wenn $\sum_n p_n < \infty$.

3. Sei X_n und X Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie, dass X_n gegen X fast sicher konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$, $P(\sup_{i \geq n} |X_i - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$.

4. Sei $X_1, X_2, \dots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1 (d.h. $P(X_n > x) = e^{-x}$ für $x \geq 0$) und $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Beweisen Sie, dass

(a) $\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} = 1$, P -fast sicher.

(b) $\lim_n \frac{M_n}{\ln n} = 1$, P -fast sicher.

[Hinweis: Beachten Sie, dass es ausreicht, die fast sicher Konvergenz entlang Teilfolge $n_k = a^k$ mit $a > 1$ nachzuweisen.]