

ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 8 (Abgabe am 06.06.2018)

1. Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable mit $P(X > 0) > 0$ und $E[X^2] < \infty$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(X > 0) \geq \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}.$$

2. Sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable und $p > 0$. Beweisen Sie, dass

$$E[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X > x) dx.$$

3. Sei X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und nimm an, dass X eine Dichte f besitzt. Beweisen Sie, dass die Zufallsvariable $X + Y$ auch eine Dichte h besitzt und zwar

$$h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y) dF_Y(y),$$

wobei F_Y die Verteilungsfunktion von Y ist.

[Insbesondere, falls Y auch eine Dichte g besitzt, dann gilt $h(x) = f * g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)dy$.]

4. Sei X und Y unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[0, 1]$. Man bestimme die Dichte von $X + Y$.
5. Sei X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ bzw. μ . Man bestimme $P(X < Y)$.
6. Sei X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Eine messbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ heißt Dichte von Zufallsvektor (X, Y) , falls für jede $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A h(x, y) dx dy.$$

Nimm an, dass der Zufallsvektor (X, Y) besitzt eine Dichte h . Beweisen Sie, dass X und Y genau dann unabhängig sind, wenn $h(x, y) = f(x)g(y)$ für einige messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

7. Sei $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ und P das Lebesgue-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Für $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$, sei

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & [2^n \omega] \text{ ist gerade} \\ 0 & [2^n \omega] \text{ ist ungerade,} \end{cases}$$

wobei $[\cdot]$ die Abrundungsfunktion ist (d.h. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$). Beweisen Sie, dass die Zufallsvariablen X_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind und jede X_n ist eine Bernoulliverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\frac{1}{2}$.