ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 6 (Abgabe am 23.05.2018)

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ist X eine Zufallsvariable, falls
 - (a) X^2 eine Zufallsvariable ist?
 - (b) X^3 eine Zufallsvariable ist?
 - (c) für jedes $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$?

2. Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die von X erzeugte σ -Algebra ist durch $\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ definiert. Bestimme $\sigma(X)$, falls
 - (a) $X(\omega) = \frac{\omega}{2}$.
 - (b) $X(\omega) = \frac{1}{2}$.
 - (c)
$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \omega \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2} & \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 1 & \omega \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
 - (d)
$$X(\omega) = \begin{cases} \omega & \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \omega \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

3. Sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $(0, 1)$. Man bestimme die Dichte von Zufallsvariable $Y = -\ln X$.

4. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ . Man bestimme die Dichte von Zufallsvariable $Y = \min(X, X^2)$.

5. Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ und $Y = e^X$. Für welche Werte des Parameters λ besitzt die Zufallsvariable Y einen endlichen
 - (a) Erwartungswert?
 - (b) Varianz?

6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Beweisen Sie die folgende Aussage: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) < \delta$, gilt $E[|X| \mathbf{1}_A] < \varepsilon$.