ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 5 (Abgabe am 16.05.2018)

1. Sei $\lambda > 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, sei $p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Beweisen Sie, dass für jede $a < b$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda + a\sqrt{\lambda} \le k \le \lambda + b\sqrt{\lambda}} p_\lambda(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, schreibt man "$f \sim g$ für $n \to \infty$", falls $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Beweisen Sie die asymptotische Äquivalenz

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n} \quad \text{für } n \to \infty,$$

indem Sie die folgende Aussagen zeigen:

   (a) $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

   (b) $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^\infty e^{n(\ln(1+y)-y)}\, dy$

   (c) $\int_{-1}^\infty e^{n(\ln(1+y)-y)}\, dy \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ny^2}{2}}\, dy$ für $n \to \infty$

   [Hinweis: Benutzen Sie die Taylorentwiklung von der Funktion $\ln(1 + y)$ mit Entwicklungsstelle 0.]

   (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ny^2}{2}}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

3. Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{A \in \Omega$: entweder A oder A^c ist höchstens abzählbar$\}$ und für jede $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ falls A höchstens abzählbar ist und sonst $P(A) = 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

   (b) Welche der folgenden Funktionen sind Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x), \qquad h(x) = x\,\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x).$$

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left((-\infty, x],\, x \in \mathbb{R}\right)$

   (b) für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $x \in \mathbb{R}$, die Menge $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ Borel messbar ist

   (c) die kleinste σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass jede stetige Funktion von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, gleich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.