ÜBUNGSAUFGABEN, Serie 4 (Abgabe am 09.05.2018)

1. Es seien X und Y unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ bzw. μ. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $X + Y$, also die bedingte Wahrscheinlichkeiten
$$P[X = k \mid X + Y = n], \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

2. Es seien X und Y unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter p. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $\min(X, Y)$ und $X - Y$ unabhängig sind.

3. Aus einem gut gemischten Kartenspiel von 32 Karten werden nacheinander Karten gezogen (ohne Zurücklegen), bis der Kreuzbube gezogen wird. Sei X die Gesamtzahl der gezogenen Karten. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

4. In einer Urne befinden sich N weiße Kugeln. Der Urne wird willkürlich eine Kugel entnommen und gleichzeitig wird eine gleichartige rote Kugel in die Urne gelegt. Also hat sich die Anzahl der Kugeln in der Urne nicht geändert. Derselbe Vorgang wird wiederholt, bis alle N Kugeln in der Urne rot sind. Sei X die Anzahl der durchgeführten Entnahmen. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

5. Sei X eine zufällig gewählte Zahl aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ und Y eine zufällig gewählte Zahl aus der Menge $\{X, X + 1, \ldots, 4\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y.

6. Sei X die Anzahl aller Fixpunkte einer zufälligen Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, N$. (i ist ein Fixpunkt einer Permutation σ, wenn $\sigma(i) = i$.) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.