NACHKLAUSURLÖSUNGEN, 13.08.2018, 10:00 – 12:00

1. Drei Zahlen werden willkürlich aus $\{1, \dots, 12\}$ gezogen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die größte von ihnen mindestens 11 ist?

   Antwort: $\frac{5}{11}$.

   Lösung. Seien a, b, c die gezogenen Zahlen. Die gewünschte Wahrscheinlichkeit ist

   $$P(\max(a,b,c) \geq 11) = 1 - P(\max(a,b,c) \leq 10) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{5}{11}.$$

   □

2. In einer Urne befanden sich genau 3 schwarze und 3 weiße Kugeln, bevor eine Kugel verloren ging. Zwei Kugeln werden willkürlich aus der Urne mit 5 verbleibenden Kugeln (ohne Zurücklegen) gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verlorene Kugel weiß ist, wenn die beiden gezogenen Kugeln weiß sind?

   Antwort: $\frac{1}{4}$.

   Lösung. Sei B_1 das Ereigniss, dass eine weiße Kugeln verloren ging. Sei B_2 das Ereigniss, dass eine schwarze Kugeln verloren ging. Sei A das Ereigniss, dass die gezogene Kugeln weiß sind. Dann gilt

   $$P(B_1) = P(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(A|B_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}, \qquad P(A|B_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}.$$

   Aus der Bayes-Formel ergibt sich

   $$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} = \frac{1}{4}.$$

   □

3. Seien X und Y Zufallsvariablen mit $P(X > 0) = P(Y > 0) = \frac{3}{4}$ und $P(X + Y > 0) = \frac{1}{2}$. Beweisen Sie, dass X und Y abhängig sind.

   Lösung. Man beachte, dass $P(X + Y > 0) \geq P(X > 0, Y > 0)$. Nimm an, dass X und Y unabhängig sind. Dann gilt

   $$P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0)P(Y > 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} > \frac{1}{2} = P(X + Y > 0).$$

   Widerspruch. □

4. Seien X und Y unabhängige identischverteilte Zufallsvariablen, so dass $X + Y$ eine poissonverteilte Zufallsvariable ist. Beweisen Sie, dass X auch poissonverteilt ist.

Lösung. Falls $X + Y$ eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ ist, dann die charakteristische Funktion von $X + Y$ gleich $\varphi_{X+Y}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ ist. Andererseits, da X und Y unabhängig und identischverteilt sind, gilt es

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)^2.$$

Folglich, $\varphi_X(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda(e^{it}-1)+\pi i k(t)}$, wobei $k(t) \in \{0, 1\}$ für $t \in \mathbb{R}$. Da φ_X eine stetige Funktion mit $\varphi_X(0) = 1$ ist, ist $k(t) = k(0) = 0$.

Wir schließen daraus, dass X eine Zufallsvariable mit der charakteristischen Funktion $\varphi_X(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda(e^{it}-1)}$ ist, die tatsächlich die charakteristische Funktion der Poissonverteilung mit Parameter $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt, dass X poissonverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}\lambda$ ist. □

5. Seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1. Man bestimme die Verteilung von $\frac{X}{X+Y}$.

   Antwort: Die Gleichverteilung auf $[0, 1]$.

   Lösung. Sei $F(z) = P(\frac{X}{X+Y} \leq z)$ die Verteilungsfunktion von $\frac{X}{X+Y}$. Da X und Y fast sicher positiv sind, ist $0 < \frac{X}{X+Y} \leq 1$ fast sicher. Insbesondere, $F(z) = 0$ für $z \leq 0$ und $F(z) = 1$ für $z \geq 1$.

   Sei $z \in (0, 1)$, dann folgt es aus der Unabhängigkeit von X und Y und vom Satz von Fubini, dass

$$F(z) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\frac{x}{x+y} \leq z}(x, y) e^{-y} dy\right] e^{-x} dx = \int_0^\infty \left[\int_{\frac{(1-z)x}{z}}^\infty e^{-y} dy\right] e^{-x} dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-\frac{(1-z)x}{z}} e^{-x} dx = z.$$

   Somit ist $\frac{X}{X+Y}$ gleichverteilt auf $[0, 1]$. □

6. Beweisen Sie, dass für alle Zufallsvariablen X und Y mit endlichen Erwartungswerten die Zufallsvariable $\max(X, Y)$ einen endlichen Erwartungswert besitzt und geben Sie ein Beispiel an, dass die Umkehrung nicht gilt.

   Lösung. Beachte, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $|\max(x, y)| \leq |x| + |y|$. Deshalb, da $E[|X|]$ und $E[|Y|]$ endlich sind, ist $E[|\max(X, Y)|]$ auch endlich.

   Seien X und Y beliebige Zufallsvariablen mit $X \geq 0$, $E[X] < \infty$, $Y \leq 0$ und $E[-Y] = \infty$. Dann gilt $E[|\max(X, Y)|] = E[X] < \infty$.

   [Weiterhin, wenn $\max(X, Y)$ *eine Zufallsvariable ist, dann folgt es nicht, dass* X *und* Y *Zufallsvariablen sind.]* □

7. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = n) = \frac{1}{n^a}$ und $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^a}$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Für welche Werte von a konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty X_n$ fast sicher?

   Antwort: $a > 1$.

Lösung. Beachte, dass die Reiche $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $P(X_n = 0$ für alle ausreichend großen $n) = 1$. Nach dem Lemma von Borel-Cantelli und der Unabhängigkeit von X_n ist dies genau dann der Fall, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n) < \infty$. Es bleibt zu bemerken, dass $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < \infty$ genau dann, wenn $a > 1$. □

8. Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit $X_1 \leq X_2 \leq \dots$ und $X_n \xrightarrow{P} X$. Beweisen Sie, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

   Lösung. Jede monotone Folge besitzt einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert, also konvergiert X_n fast sicher gegen eine numerische Zufallsvariable, die wir mit X' bezeichnen. Es bleibt nur zu zeigen, dass $X' = X$ fast sicher ist.

   Da X_n in Warhscheinlichkeit gegen X konvergiert, existiert eine Teilfolge $n(k)$, so dass $X_{n(k)}$ fast sicher gegen X konvergiert. Andererseits, konvergiert $X_{n(k)}$ fast sicher gegen X'. Folglich, $X' = X$ fast sicher. □

9. Seien X_n Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X_n) \leq C < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nimm an, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $|m - n| > 1$, X_m und X_n unabhängig sind. Beweisen Sie, dass

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

   wobei $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

   Lösung-1. Wir sollten beweisen, dass für jedes $\varepsilon > 0$, $P(|\frac{S_n - E[S_n]}{n}| > \varepsilon) \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Durch Chebyshev-Ungleichung, gilt es

$$P\left(|\frac{S_n - E[S_n]}{n}| > \varepsilon\right) = P\left(|S_n - E[S_n]| > \varepsilon n\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\varepsilon^2 n^2}.$$

   Somit ist der Beweis vollständig, wenn $\mathrm{Var}(S_n) = o(n^2)$ für $n \to \infty$.

   Durch Bienaymé-Gleichung,

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) + \sum_{k \neq l} E\left[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])\right].$$

   Da die Varianzen von X_k gleichmäßig begrenzt sind, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) \leq Cn = o(n^2)$.

   Jetzt betrachten wir die zweite Summe. Wenn $|k - l| > 1$, durch die Unabhängigkeit von X_k und X_l, erhalten wir, dass

$$E\left[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])\right] = E\left[X_k - E[X_k]\right] \, E\left[X_l - E[X_l]\right] = 0.$$

   Wenn $|k - l| = 1$, durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir, dass

$$|E\left[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])\right]| \leq \mathrm{Var}(X_k)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{Var}(X_l)^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Folglich,

$$\left|\sum_{k\neq l} E\left[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])\right]\right| = \left|\sum_{|k-l|=1} E\left[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])\right]\right|$$
$$\leq 2C(n-1) = o(n^2).$$

□

Lösung-2. Seien $Y_k = X_{2k-1}$ und $Z_k = X_{2k}$. Dann sind Y_k paarweise unabhängig und sind Z_k paarweise unabhängig. Seien $S'_n = Y_1 + \ldots + Y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ und $S''_n = Z_1 + \ldots + Z_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Durch das schwache Gesetz von der großen Zahlen, $\frac{S'_n - E[S'_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$ und $\frac{S''_n - E[S''_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$. Beachte, dass $S_n = S'_n + S''_n$. Folglich, $\frac{S_n - E[S_n]}{n} = \frac{S'_n - E[S'_n]}{n} + \frac{S''_n - E[S''_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$. □

10. Seien X_n unabhängige identischverteilte Zufallsvariablen mit endlicher positiver Varianz. Sei $m = E[X_n]$. Man bestimme $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq 2018)$ für alle möglichen Werte von $m \in \mathbb{R}$, wobei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

    Antwort: 0 *für* $m > 0$, 1 *für* $m < 0$, $\frac{1}{2}$ *für* $m = 0$.

Lösung. Durch das starke Gesetz von der großen Zahlen, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f.s.} m$. Also, $S_n \xrightarrow{f.s.} +\infty$ für $m > 0$ und $S_n \xrightarrow{f.s.} -\infty$ für $m < 0$. Insbesondere, $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq 2018) = 0$ für $m > 0$ und $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq 2018) = 1$ für $m < 0$.

Betrachte nun den Fall $m = 0$. Sei $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_n) \in (0, +\infty)$. Durch den zentralen Grenzwertsatz konvergiert $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Insbesondere, für jedes $x \in \mathbb{R}$,

$$P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \longrightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Folglich,

$$P(S_n \leq 2018) = P\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{2018}{\sigma\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

□