

KLAUSURLÖSUNGEN, 19.07.2018, 10:00 – 12:00

1. In einer Urne befinden sich genau 12 schwarze, 8 rote und 10 gelbe Kugeln. Zwei Kugeln werden willkürlich aus der Urne (ohne Zurücklegen) gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogenen Kugeln von unterschiedlicher Farbe sind, wenn man weiß, dass keine der gezogenen Kugeln gelb ist?

Antwort: $\frac{48}{95}$.

Lösung. Betrachte die Ereignisse $A = \{\text{die gezogenen Kugeln sind von unterschiedlicher Farbe}\}$ und $B = \{\text{keine der gezogenen Kugeln gelb ist}\}$. Dann ist die gewünschte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{\text{die Kugeln sind schwarz und rot}\})}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{12}{1}\binom{8}{1}}{\binom{30}{2}}}{\frac{\binom{20}{2}}{\binom{30}{2}}} = \frac{48}{95}.$$

□

2. Eine mündliche Prüfung besteht aus drei nacheinander gestellten Fragen, die jeweils eine Definition (Definition-Frage) oder einen Beweis (Beweis-Frage) erfordern. Ein Student kann aus zwei möglichen Varianten der Fragenfolgen wählen:

(a) Beweis – Definition – Beweis oder (b) Definition – Beweis – Definition.

Um die Prüfung zu bestehen, muss er zwei aufeinanderfolgende Fragen richtig beantworten. Welche der vorgeschlagenen Varianten sollte der Student wählen, um seine Chancen, die Prüfung zu bestehen, zu erhöhen, wenn er die richtige Antwort zur Definition-Frage mit Wahrscheinlichkeit d und zur Beweis-Frage mit Wahrscheinlichkeit b kennt, wobei $b < d$? Die Auswahl der Fragen (außer der Reihenfolge) ist zufällig.

Antwort: (a).

Lösung. Sei A das Ereignis, dass der Student die Prüfung in der Reihenfolge (a) besteht. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{Antworten auf Fragen 1 und 2 sind richtig}) \\ &+ P(\text{Antwort auf Frage 1 ist falsch, Antworten auf Fragen 2, 3 sind richtig}) \\ &= bd + (1-b)db = bd(2-b). \end{aligned}$$

Analog, wenn B das Ereignis ist, dass der Student die Prüfung in der Reihenfolge (b) besteht, dann gilt $P(B) = bd(2-d) < bd(2-b) = P(A)$. □

3. Seien X und Y Zufallsvariablen, so dass X^2 und Y^2 unabhängig sind. Ist es wahr oder falsch, dass X und Y auch unabhängig sind?

Antwort: falsch.

Lösung. Betrachte die Zufallsvariablen $X = Y$ mit $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. Dann $X^2 = Y^2 = 1$, also sind X^2 und Y^2 unabhängig. Aber X und Y sind offensichtlich nicht unabhängig, da, z.B., $P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(X = 1)P(Y = 1)$. $\square$

4. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, X bernoulliverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$, und Y gleichverteilt auf $[0, 1]$. Man bestimme die Verteilung von $X + Y$.

Antwort: Gleichverteilung auf $[0, 2]$.

Lösung. Sei F die Verteilungsfunktion von $X + Y$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X + Y \leq x) = P(X + Y \leq x, X = 0) + P(X + Y \leq x, X = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Y \leq x - 1) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}1 = 1 & x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Folglich, $F(x) = 0$ für $x \leq 0$, $F(x) = \frac{1}{2}x$ für $0 \leq x \leq 2$ und $F(x) = 1$ für $x \geq 2$, die die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $[0, 2]$ ist. $\square$

5. Zwei Punkte werden willkürlich vom Intervall $[0, 1]$ ausgewählt. Berechnen Sie den Erwartungswert des Abstandes zwischen ihnen.

Antwort: $\frac{1}{3}$.

Lösung. Seien X und Y unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[0, 1]$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini,

$$\begin{aligned} E[|X - Y|] &= \int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (x - y) dy + \int_x^1 (y - x) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1 - x^2}{2} - x(1 - x) \right] dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

6. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen und $X_n \xrightarrow{f.s.} X$. Beweisen Sie, dass $\text{Var}(X) = 0$.

Lösung-1. Sei $\mathcal{T}$ die asymptotische σ -Algebra der Folge X_n . Nach dem 0-1 Gesetz von Kolmogorov, ist $\mathcal{T}$ trivial. Man beachte, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mit anderen Worten, es gibt eine Konstante c , so dass $P(X = c) = 1$. Insbesondere besitzt X eine endliche Varianz, die tatsächlich 0 ist. $\square$

Lösung-2. Nimm an, dass $\text{Var}(X) \in (0, +\infty]$. Dann ist X fast sicher nicht konstant. Insbesondere existieren zwei reelle Zahlen $a < b$, so dass $P(X < a) > 0$ und $P(X > b) > 0$. Andererseits, gilt es

$$\begin{aligned} P(X < a) &= P(\lim_n X_n < a) \leq P(\cup_n \cap_{m \geq n} \{X_m < a\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\cap_{m \geq n} \{X_m < a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \geq n} P(X_m < a), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Unabhängigkeit von X_n folgt.

Falls existieren $\gamma < 1$ und eine unendliche Teilfolge $n(k)$ mit $P(X_{n(k)} < a) < \gamma$, dann $\prod_{m \geq n} P(X_m < a) = 0$ für alle n . Da $P(X < a) > 0$, kann dies nicht wahr sein. Es bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n < a) = 1$.

Analog, zeigt man, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > b) = 1$, was aber im Widerspruch zu $P(X_n < a) + P(X_n > b) \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. $\square$

7. Seien X_n Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Nimm an, dass $|S_n| \leq an$ und $\text{Var}(S_n) \geq bn^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und einige positive Konstanten a und b . Beweisen Sie, dass

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Lösung. Sei $Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{n}$ und nimm an, dass $Z_n \xrightarrow{P} 0$.

Beachte, dass $|Z_n| \leq 2a$. Es folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz (c.f. ÜA 9.1(b)), dass $E[Z_n^2] \rightarrow 0$. Jedoch, $E[Z_n^2] = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} \geq b > 0$. Widerspruch.

[Man kann die Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz von ÜA 9.1(b), also für in Wahrscheinlichkeit konvergierten Folgen, vermeiden. Falls $Z_n \xrightarrow{P} 0$, existiert eine Teilfolge $n(k)$ mit $Z_{n(k)} \xrightarrow{f.s.} 0$. Dann folgt es aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass $E[Z_{n(k)}^2] \rightarrow 0$. Jedoch, wie zuvor $E[Z_{n(k)}^2] \geq b$.] $\square$

8. Seien X_n unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1. Beweisen Sie, dass

$$\frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{(\ln n)^2} \Rightarrow 0.$$

Lösung. Sei $Z_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{(\ln n)^2}$. Durch die Definition der Konvergenz in Verteilung sollten wir zeigen, dass $P(Z_n \leq x) \rightarrow 0$ für $x < 0$ und $P(Z_n \leq x) \rightarrow 1$ für $x > 0$. Die erste Aussage ist trivial, da Z_n nicht negativ ist, also $P(Z_n \leq x) = 0$ für $x < 0$.

Sei $x > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x(\ln n)^2) \stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x(\ln n)^2) \\ &= \left(1 - e^{-x(\ln n)^2}\right)^n \rightarrow 1, \text{ für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei die Gleichung $(*)$ aus der Unabhängigkeit von X_i folgt. $\square$

9. Man bestimme alle reellen Zahlen $\lambda, \mu > 0$, für die ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Zufallsvariablen X, Y auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ existieren, so dass X poissonverteilt mit Parameter λ ist, Y poissonverteilt mit Parameter μ ist, und $P(X \leq Y) = 1$.

Antwort: $\lambda \leq \mu$.

Lösung. Man beachte zuerst, dass wenn $P(X \leq Y) = 1$, dann auch $\lambda = E[X] \leq E[Y] = \mu$. Die gewünschte Konstruktion ist also nicht möglich, wenn $\lambda > \mu$. Wir werden zeigen, dass die Konstruktion für $\lambda \leq \mu$ möglich ist.

Für $\lambda = \mu$, betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum auf denen eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ definiert ist und nimm $Y = X$.

Für $\lambda < \mu$, betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum auf denen zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Z definiert sind, wobei X poissonverteilt mit Parameter λ ist und Z poissonverteilt mit Parameter $\mu - \lambda$ ist, und nimm $Y = X + Z$. $\square$

10. Sei φ charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen. Ist $|\varphi|^2$ charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen?

Antwort: ja.

Lösung. Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristische Funktion φ . Beachte, dass für $t \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi(t)|^2 = \varphi(t) \overline{\varphi(t)} = E[e^{itX}] E[e^{-itX}].$$

Sei Y eine Zufallsvariable, die von X unabhängig ist und $Y \stackrel{d}{=} -X$. Dann gilt

$$|\varphi(t)|^2 = E[e^{itX}] E[e^{itY}] = E[e^{it(X+Y)}],$$

also $|\varphi|^2$ die charakteristische Funktion von $X + Y$ ist. $\square$