

ZUSÄTZLICHE ÜBUNGEN ZUR KLAUSURVORBEREITUNG

1. Aus einem gut gemischten Kartenspiel von 52 Karten werden drei Karten gezogen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
 - (a) genau ein Ass gezogen wird,
 - (b) mindestens ein Ass gezogen wird,
 - (c) 3, 7, und Ass gezogen werden.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim n -maligen Würfeln von zwei Würfeln mindestens einmal 12 Augen erscheinen?
3. In einer Familie mit zwei Kindern, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Söhne sind, wenn
 - (a) das älteste Kind ein Sohn ist?
 - (b) mindestens ein Kind ein Sohn ist?
4. Wenn man gegen einen gleichstarken Gegner spielt, was ist mehr wahrscheinlich: 3 von 4 oder 5 von 8 Spielen zu gewinnen?
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim 12-maligen Würfeln jede Augenzahl genau zweimal erscheint?
6. Eine seltene Krankheit liegt bei ungefähr 0,5 Prozent der Bevölkerung vor. Es gibt einen Test auf diese Krankheit, der bei 99 Prozent der Kranken anspricht, aber auch bei 2 Prozent der Gesunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine getestete Person tatsächlich krank, wenn der Test bei ihr angesprochen hat?
7. Ist X eine Zufallsvariable, wenn $\max(X, 0)$ eine Zufallsvariable ist?
8. Seien A und B disjunkte Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Beweisen Sie, dass A und B nicht unabhängig sind.
9. Für welche Ereignisse A und B , sind $A \cap B$ und $A \cup B$ unabhängig?
10. Für welche a und b ist die Funktion $F(x) = \begin{cases} a + \frac{\sin(bx)}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ eine Verteilungsfunktion?
11. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F , bzw. G . Man bestimme die Verteilungsfunktion von Zufallsvariable (a) $\max(X, Y)$, (b) $\min(X, Y)$.
12. Seien X und Y unabhängige geometrischverteilte Zufallsvariablen mit Parameter p . Man bestimme $P(X = Y)$.
13. Sei X exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1. Man bestimme die Dichte von X^2 .
14. Seien X und Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Man bestimme die Verteilung von Zufallsvariable $X^2 + Y^2$.

15. Sei Y eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ . Man bestimme $E[(1+Y)^{-1}]$.
16. Man gib ein Beispiel für (a) nicht integrierbare Zufallsvariable, (b) integrierbare Zufallsvariable mit unendlicher Varianz.
17. Seien X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass $E[X^2] < \infty$ genau dann, wenn $E[(X+Y)^2] < \infty$.
18. Man gib ein Beispiel für zwei abhängige unkorrelierte Zufallsvariablen.
19. Beweisen Sie, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ u.o.}) = 0$.
20. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| > 1]$ konvergiert.
21. Sei $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$ und $P(X = Y) = 1$. Beweisen Sie, dass $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$.
22. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, X_n und Y_n unabhängige Zufallsvariablen für jedes $n, X_n \Rightarrow X$ und $Y_n \Rightarrow Y$. Beweisen Sie, dass $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$.
23. Man gib ein Beispiel für eine

(a) beschränkte (b) stetige

Funktion g und Verteilungen μ und μ_n , so dass $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$, aber $\int g d\mu_n \not\rightarrow \int g d\mu$.

24. Seien $x \in \mathbb{R}, X$ und X_n Zufallsvariablen mit $E[|X_n|] \rightarrow E[|X|]$. Ist es wahr oder falsch, dass $E[|X_n + x|] \rightarrow E[|X + x|]$?
25. Sei $X_n \Rightarrow X$. Beweisen Sie, dass $\liminf_n \text{Var}(X_n) \geq \text{Var}(X)$.
26. Sei X_n poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parametern n . Konvergiert die Folge $\frac{X_n}{n}$ (a) in Verteilung, (b) in Wahrscheinlichkeit, (c) fast sicher?
27. Seien X_n Zufallsvariablen mit $P(X_n = n^p) = n^{-2}$ und $P(X_n = 0) = 1 - n^{-2}$. Für welche p konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher?
28. Seien X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $P(X_n = n^a) = P(X_n = -n^a) = \frac{1}{2}$. Beweisen Sie, dass für jedes $a < \frac{1}{2}, \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.
29. Seien X_n unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[-n, n]$. Ist es wahr oder falsch, dass $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 0$?
30. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ charakteristische Funktionen und $a_1, a_2, \dots$ positive reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Beweisen Sie, dass $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ eine charakteristische Funktion ist.
31. Seien X_n unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit positiver Varianz. Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahlen a und $b, P(a < S_n < b) \rightarrow 0$, wobei $S_n = X_1 + \dots + X_n$.