Stochastische Analysis im WS 18/19
3. Übung

1) Zeigen sie, dass ein progressiv messbarer Prozess durch stückweise konstante Prozesse der Form

$$X_t^{(n)}(\omega) = \sum 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t) K_i^{(n)}(\omega),$$

wobei $K_i^{(n)}$ jeweils $\mathcal{F}_{t_{i+1}}$-messbar ist, punktweise approximiert werden kann. Folgern Sie hieraus, dass für eine $\mathcal{F}_{\cdot}$-Stoppzeit τ und X progressiv messbar die Zufallsgröße X_τ auch $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist.

Zeigen sie durch ein Gegenbespiel, dass für letzteres die pogressive Messbarkeit von X i.A. unverzichtbar ist.

2) Beweisen sie rigoros das Assoziativgesetz $A \bullet (B \bullet C) = (AB) \bullet C$ für die Lebesgue-Stietjes Integration.

Hinweis: Verwenden Sie ein Monotone-Klassen-Argument.

3) Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ einen filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und es bezeichne $S := L^2(\Omega, \mathcal{C}_0[0,T]) \cap \{X \big| X \text{ ist } \mathcal{F}_{\cdot}\text{-adaptiert}\}$ die Menge der Zufallsvariablen mit werten im Banachraum der stetigen Funktionen, welche aufgefasst als stochastische Prozesse $\mathcal{F}_{\cdot}$-adaptiert sind. Zeigen Sie, dass S versehen mit der norm $\|\Xi\|_S := \left(E\left[\|\Xi\|^2_{C_0[0,T]}\right]\right)^{1/2}$ ein Banachraum ist.

4) Ein Martingal (M_t) heiße *integrierbares Martingal*, wenn für alle t gilt, dass $E(|M_t|) < \infty$. Zeigen Sie: Ein lokales Martingal ist ein integrierbares Martingal genau dann, wenn für jedes t die Familie der Zufallsvariablen $\{M_{\tau\wedge t} \big| \tau \text{ ist Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

5) Es sei (B_t) eine Brown'sche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\{\tau_s\}_{s\geq 0}$ eine davon stochastisch unabhängige monotone Familie von Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass dann $X_s := B_{\tau_s}$ ein Martingal bzgl. der Filtrierung $\mathcal{G}_s := \mathcal{F}^B_{\tau_s \cdot}$ ist.